

目 录

学科专业知识	1
小学数学	2
第一章 数与代数	3
第二章 空间与图形	7
第三章 统计与可能性	12
第四章 应用题	14
第五章 小数奥数	22
初中数学	70
第一章 数与式	71
第二章 方程与不等式	79
第三章 变量与函数	83
第四章 图形与证明	86
第五章 图形与变换	99
第六章 统计与概率	103
高中数学	108
第一章 集合与简易逻辑	109
第二章 函数与导数	119
第三章 解三角形	131
第四章 数列	143
第五章 不等式	154
第六章 空间几何体	163
第七章 统计与概率	174
大学数学	183
导数与积分	184
教材教法	186
第一章 新课标	187
第二章 教学论	203
第三章 案例分析	208
第四章 教学设计	217
课标挖空版	243

学科专业知识

小学数学

第一章 数与代数

一、选择题

1. 【答案】B.

【格木解析】能够组成的四位数有7007、7070、7700，其中7007和7070只读一个“零”。

2. 【答案】D.

【格木解析】自然数按因数的个数分，可以分为素数、合数、0和1。

3. 【答案】B.

【格木解析】自然数中，能被2整除的数，叫做偶数，所以正确选项为B选项。

4. 【答案】D.

【格木解析】A选项中质数与合数，反例2和9；B选项中奇数与偶数，反例3和4；C选项中质数与质数，一定互质；D选项中偶数与偶数公因数为2，不可能互质。

5. 【答案】C.

6. 【答案】C.

【格木解析】 $M=30$ ，30的因数有1，2，3，5，6，10，15，30。一共8个。

7. 【答案】D.

【格木解析】依题意，可知a、b为连续非零自然数，则a、b互质，所以a与b的最小公倍数为二者的乘积ab。

8. 【答案】D

9. 【答案】B.

【格木解析】既能被2整除又能被3整除的数一定是6的倍数，据此解答即可。解： $100 \div 6 = 16 \cdots 4$ ，既能被2整除又能被3整除的数有16个。

10. 【答案】B.

【格木解析】168是由8，6，1组成的最小的数且满足能同时被4，3，2整除。

11. 【答案】D.

【格木解析】这个五位数的个位数是0，能被2和5整除， $2+1+3+0=6$ ，是3的倍数，当括号内的数字为0、3、6、或9时，这个5位数能被3整除，所以填法总数为4。

12. 【答案】B.

【格木解析】根据题中叙述的完全数的定义，分别找出这四个数的因数后发现28的因数有1、2、4、7、14、28，除28外， $1+2+4+7+14=28$ ，所以28是完全数。

13. 【答案】D.

【格木解析】根据互质数的含义可知：两个数是互质数，则这两个数可能都是质数，也可能都是合数，也可能是一个质数、一个合数。

14. 【答案】C.

【格木解析】2、3、4、5、6、7、8、9、10这9个数中有4个质数，这也是最多的，因为任意连续9个自然数中至少有4个偶数，剩下的五个奇数中至少有一个是3的倍数。

15. 【答案】C.

【格木解析】先用 $135 \div 27=5$ 求出另一个数独有的因数是5，然后 $5 \times 9=45$ 求得另一个数。

16. 【答案】A.

【格木解析】当这两个数越接近时乘积越大，故这两个数分别是97、98，乘积为9506。

17. 【答案】A.

【格木解析】分数单位是 $\frac{1}{11}$ 的最大真分数 $\frac{10}{11}$ ，最小假分数 $\frac{11}{11}$ ，和是 $\frac{21}{11}$ 。

18. 【答案】B.

19. 【答案】B.

【格木解析】最简真分数，即分子比分母数字小。 $7+x < 15 \Rightarrow x < 8$ ，故x的取值可以有8个，同时最简则分子和分母要求互质，则分子不可以为9，10，12，故选B选项。

20. 【答案】B.

21. 【答案】D.

【格木解析】“四舍”得到的近似数比原数小，“五入”得到的近似数比原数大。

22. 【答案】B.

【格木解析】万分位是1，舍去，答案应为0.050，而选项B是0.051。

23. 【答案】B.

【格木解析】小数点向右移动两位，原数扩大100倍，再缩小100倍，原数不变。

24. 【答案】B.

【格木解析】0. $\dot{2}88156\dot{9}$ 是七位小数循环，0. $\dot{5}367\dot{9}$ 是五位小数循环，它们的最小公倍数为35，选B。

25. 【答案】B.

【格木解析】无论从左数还是从右数笑笑都排在第5位，说明笑笑左右都有4人，加上笑笑共9人。

26. 【答案】D.

【格木解析】气球的排列方式是7个一循环，所以 $2016 \div 7=288$ 。所以第2016个气球是绿色。

27. 【答案】A.

【格木解析】 $25\% \div (1+25\%) = 20\%$ 。

28. 【答案】A.

【格木解析】① $(6-5) \div 5=20\%$ ，正确。② $(6-5) \div 6=\frac{1}{6}$ ，正确。③ $(6-5) \div 2 \div 6=\frac{1}{12}$ ，正确。④ $5 \div (5+6)=\frac{5}{11}$ ，错误。

29. 【答案】D.

【格木解析】因为绳子的具体长度未知所以无法比较剩下的绳长。

30. 【答案】B.

【格木解析】原价设为单位1，由题意得 $1 \times 1.2 \times 0.8 = 0.96$ 。故现价低于原价。

31. 【答案】B.

【格木解析】特殊值法，直接令a等于2，b等于3进行计算；也可由 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ 得 $a = \frac{2}{3}b$ ，带入 $\frac{a}{a+b}$ 进行计算，约分后得B选项。

32. 【答案】D.

【格木解析】由题意可得 $a = \frac{2}{3}b$, $c = 2b$, $a + b + c = \frac{2}{3}b + b + 2b = 22$, 可得 $b=6$, 即 $a=4$ 。

33. 【答案】B.

【格木解析】比例尺为1:10000代表的是平面上的1cm代表实际的距离10000cm，那么平面上的1平方厘米的面积代表的是100000000平方厘米。那么面积为2平方厘米的时候对应的面积是200000000平方厘米，所以对应的是20000平方米。选B。

34. 【答案】AB, C.

【格木解析】不妨设汽车每次运货吨数为x，运货次数为y，运货的总吨数为z，这三种量的关系为 $xy=z$ ，可知成正比例关系是AB，成反比例关系是C。

35. 【答案】B.

【格木解析】A项，在匀速运动中有，时间一定，路程与速度成正比，故A不正确。B项，在圆柱中，圆柱的体积、底面积与高之间的关系是 $V=sh$ ，故体积一定时，圆柱底面积和高成反比，故B正确。C项，根据 $s=ab$ 知长一定，宽和面积成正比，故C不正确。D项，全校人数一定时，男生和女生人数不成比例，故D不正确。所以正确选项为B选项。

36. 【答案】A.

37. 【答案】A.

【格木解析】4米记为-1米。

二、填空题

1. 【答案】31.

【格木解析】 $2-1=1$, $2 \times 2-1=3$, $2 \times 2 \times 2-1=7$, $2 \times 2 \times 2 \times 2-1=15$, $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2-1=31$ 。

2. 【答案】1.

【格木解析】由分析可知，减去余下的几分之几，就还剩2022的几分之几。所以2022减去它的 $\frac{1}{2}$ ，再减去余下的 $\frac{1}{3}$ ，再减去余下的 $\frac{1}{4}$ ……，直至最后减去余下的 $\frac{1}{2022}$ ，还剩下2022的 $\frac{1}{2022}$ ， $2022 \times \frac{1}{2022} = 1$ 。

3. 【答案】5; 16.

【格木解析】 $6=2\times 3$, $8=2\times 2\times 2$, $9=3\times 3$, 所以6、8、9的最小公倍数= $2\times 3\times 3\times 2\times 2=72$, 3月还有: $31-5=26$ (天), $72-26-30=16$ (天), $16<31$, 所以下一次都到图书馆的时间是5月16日。

4. 【答案】 $\frac{13}{20}$.

【格木解析】 第n个数, 是 $\frac{2n-1}{3n}$; 当n=20时, $\frac{2\times 20-1}{3\times 20}=\frac{39}{60}=\frac{13}{20}$ 。

5. 【答案】27.

【格木解析】 $243\div(10-1)=243\div 9=27$ 。

6. 【答案】54.

【格木解析】 最小的两个约数中一定有一个是1, 则另一个因数为: $3-1=2$; $81\div(1+2)=81\div 3=27$, $27\times 2=54$ 。

7. 【答案】 $\frac{15}{16}$.

【格木解析】 $1-(1-\frac{7}{8})\div 2=1-\frac{1}{8}\times \frac{1}{2}=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$, 所以这个分数是 $\frac{15}{16}$ 。

8. 【答案】11.

【格木解析】 由分析可知: $4\times 2+3=8+3=11$ (支)。

9. 【答案】5.

【格木解析】 设这个数为x, $\frac{7+x}{15+x}=\frac{3}{5}$, $(7+x)\times 5=(15+x)\times 3$, $35+5x=45+3x$, $2x=45-35$, $2x=10$, $x=10\div 2$, $x=5$, 所以, 这个数是5。

10. 【答案】180.

【格木解析】 设这件商品进价是x元。 $(1+50\%)x\times 80\%-x=36$, $1.5x\times 0.8-x=36$, $1.2x-x=36$, $0.2x=36$, $x=180$ 。

11. 【答案】144.

【格木解析】 设都来寺一共有x人. $x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=228$, 解得 $x=144$.

12. 【答案】46.

【格木解析】 分析可知, 共经过: $16+8+8+4+4+2+2+1+1=46$ (米)

三、解答题

1. 【答案】 $3\frac{34}{333}$; $\frac{71}{330}$

2. 【答案】44人.

【格木解析】 男生人数是 $42\times \frac{4}{7}=24$, 后来女生人数是 $24\times \frac{5}{6}=20$. $20+24=44$ (人), 故现在全班有44人.

3. 【答案】49.

【格木解析】 这道题目的关键是判断从哪个数开始整数部分是2. 因为 $1.64+0.36=2$, 那么也就是说当 $\frac{n}{30}\geq 0.36$ 时, $1.64+\frac{n}{30}$ 的整数部分是2, 因为 $\frac{n}{30}\geq 0.36\rightarrow n\geq 10.8$ 而且n是正整数, 所以最小值n = 11. 这样, 从第12项开始整数部分是2, 故 $11\times 1+19\times 2=49$.

第二章 空间与图形

一、选择题

1. 【答案】A.

【格木解析】由题意可知，设甲的长与宽分别为 $4x$, $3x$, 乙的长与宽分别为 $6y$, $5y$.

由题意得 $14x=22y$, 所以 $\frac{x}{y}=\frac{11}{7}$, 甲与乙的面积比为 $\frac{4x \cdot 3x}{6y \cdot 5y}=\frac{12x^2}{30y^2}=\frac{242}{245}$.

2. 【答案】B.

【格木解析】面积保持不变，如果长方形长和宽分别与平行四边形的底和高相同，则平行四边形的另一边长比长方形的宽长，所以它的周长较大.

3. 【答案】A.

【格木解析】根据题意可知 A 选项正确.

4. 【答案】C.

【格木解析】若底角是 70° ，则另外两个内角是 70° , 40° ；若顶角是 70° ，则另两个内角分别是 55° , 55° .

5. 【答案】C.

【格木解析】三角形内角和为 180° , $180^\circ \times \frac{5}{2+3+5}=90^\circ$, 所以这个三角形为直角三角形.

6. 【答案】C.

【格木解析】由三角形三边关系可知第三边的范围为(3, 15)，所以选 C.

7. 【答案】A.

【格木解析】可以摆成 11 厘米、7 厘米、5 厘米或是 7 厘米、5 厘米、3 厘米两种不同的三角形.

8. 【答案】B.

【格木解析】一个梯形的上底长 36dm , 如果补上一块底为 64dm , 面积为 64dm^2 的三角形，就变成了一个平行四边形，可知这个梯形的下底长为 $36+64=100\text{dm}$, 高和三角形的高相等，即高为 2dm , 根据梯形的面积公式知 136dm^2 .

9. 【答案】C.

【格木解析】圆形纸片的半径的平方为： $12.56 \div 3.14=4$, 半径为 2 厘米，正方形纸片的边长为 4 厘米，则至少需要 $4^2=16$ 平方厘米的正方形纸片。

10. 【答案】C.

【格木解析】

方法一：不妨设正方形、长方形和圆形的周长都是 16，则圆的面积为 $\frac{16 \times 16}{4\pi} = \frac{256}{12.56} \approx 20.38$ ；正方形的边长为 $16 \div 4=4$ ，面积为 $4 \times 4=16$ ；长方形长宽越接近面积越大，就取长为 5 宽为 3，面积为 $5 \times 3=15$ ，当长方形的长和宽最接近时面积也小于 16；所以周长相等的正方形、长方形和圆形，圆面积最大。

方法二：首先对比长方形和正方形，不妨长方形边长设为 b 和 c，正方形的边长设为 a，由周长相等可知 $b+c=2a$ ，利用关系式 $(b+c)^2 \geq 4bc$ ，得知 $a^2 \geq bc$ ，所以正方形的面积大于长方形面积；再次对比正方形和圆，不妨设正方形边长为 a，圆半径为 r，由周长相等可知， $4a = 2\pi r$ ，而 $a^2 = \frac{(\pi r)^2}{4} < \pi r^2$ ，可知圆的面积大于正方形的面积。

11. 【答案】B.

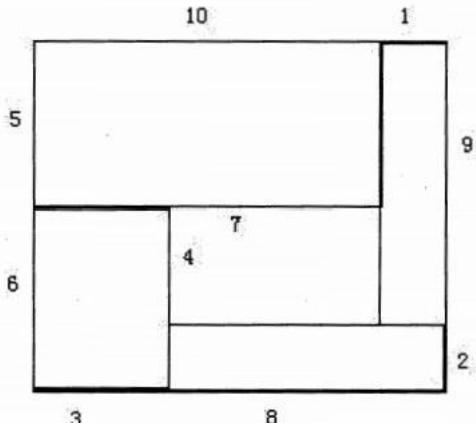
【格木解析】阴影部分可以拼成边长为 2 的正方形，所以面积为 4 平方分米。

12. 【答案】C.

【格木解析】大正方形加右侧梯形的面积为 $10 \times 10 + (4+10) \times 4 \div 2 = 128$ （平方厘米），左侧空白部分梯形面积加小正方形的面积为 $4 \times 4 + (4+10) \times 10 \div 2 = 86$ （平方厘米），两式相减可得阴影部分的面积是 42 平方厘米。

13. 【答案】C.

【格木解析】因为长宽是 1~10 中的一个数，每一个数不一样，正方形的四条边相等，所以推测 $1+10=2+9=3+8=4+7=5+6$ ，所以正方形面积为 121。



14. 【答案】D.

【格木解析】 $[16+(8+4+2)] \times 2 = (16+14) \times 2 = 60$ （厘米）。

15. 【答案】C.

【格木解析】 $6a^2 + 2a^2 = 8a^2$ 。

16. 【答案】C.

【格木解析】扣除后露出的凹面等于被切除的表面.

17. 【答案】C.

【格木解析】将长宽高分割为单位为 2 的小段，长宽正好分割为 3×2 、 2×2 ，高分割为 2×2 余 1，所以棱长为 2 的小正方体个数为 $3 \times 2 \times 2$ 个.

18. 【答案】C.

【格木解析】每条棱上会有一个小正方体两面涂红色，一共 12 条棱，因此两面涂到红色的小正方体有 12 个.

19. 【答案】B.

【格木解析】由题意知，该长方体底面边长为 $\sqrt{6}$ dm，长方体的高为 $4\sqrt{6}$ dm，所以 $S_{表}=S_{侧}+S_{底} \times 2=2 \times 6+(4\sqrt{6})^2=108$ dm²，故正确选择 B.

20. 【答案】D.

【格木解析】如果宽和高相等，则都为 2 分米，体积为 20 立方分米；如果宽或高有一个为 5 分米，则另一个为 2 分米，体积为 50 立方分米.

21. 【答案】A.

【格木解析】底面积公式为 $S=\pi R^2$. 侧面积公式为 $S=2\pi Rh$. 其中 R 扩大到原来的 3 倍. 则底面积扩大到原来的 9 倍，侧面积扩大到原来的 3 倍. 体积 $V=\pi R^2 h$ 应该扩大为原来的 9 倍，而表面积是底面面积和侧面积之和，无法比较. 所以正确答案只有 A.

22. 【答案】C.

【格木解析】 $(3-1) \times 2=4$ ， $12 \div 4=3$ 平方分米是木料的底面积. 4 米=40 分米，这块木料的体积是 $3 \times 40=120$ 立方分米. $3-1=2$ ， $10 \div 2=5$ 分钟， $6-1=5$ ，锯成 6 段需要的时间， $5 \times 5=25$ 分钟.

23. 【答案】B.

【格木解析】圆柱的体积公式为 $V=sh$ ，圆锥的体积公式为 $V=\frac{1}{3}sh$ ，所以一个圆柱的体积是与它等底等高的圆锥的体积的 3 倍. 又 $2V=120$ cm³，所以 $3V=180$ cm³.

24. 【答案】A.

【格木解析】底面直径的比是 2:3，底面的面积为 4:9，体积是 5:6，则圆柱和圆锥的高之比是 $(5 \div 4) : (6 \times 3 \div 9) = 5:8$.

25. 【答案】C.

【格木解析】若以长方形的长作圆柱的底，则底面半径为 4cm，容积为 301.44π 立方

厘米；若以宽作底，则底面半径为 3cm ，容积为 226.08π 立方厘米，所以最大的是直径为8厘米时，半径为 4cm .

26. 【答案】A.

【格木解析】此几何体为圆柱，所以 $V=Sh$ ， $S=4\pi$ ，所以 $V=4\pi \times 6=24\pi$.

27. 【答案】A.

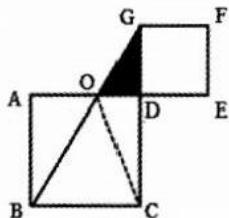
【格木解析】①三视图均为正方形，④三视图均为圆. 其余的三视图不相同.

二、填空题

1. 【答案】4.8.

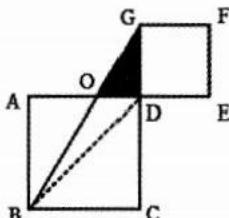
【格木解析】

方法一： $6 \times 10 \div 2 - 6 \times 6 \div 2 = 60 \div 2 - 36 \div 2 = 30 - 18 = 12$ (平方厘米) $12 \times 2 \div 10 = 24 \div 10 = 2.4$ (厘米)， $2.4 \times 4 \div 2 = 9.6 \div 2 = 4.8$ (平方厘米)



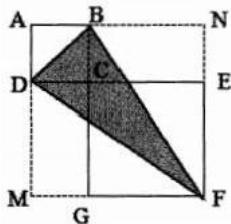
方法二： $6 \div 4 = 1.5$ ， $4 \times 6 \div 2 = 24 \div 2 = 12$ (平方厘米). $12 \div (1+1.5) = 12 \div 2.5 = 4.8$ (平方厘米).

方法三： $(4+6) \div 4 = 10 \div 4 = 2.5$. $6 \div 2.5 = 2.4$ (厘米). $2.4 \times 4 \div 2 = 9.6 \div 2 = 4.8$ (平方厘米).



2. 【答案】10.

【格木解析】延长AD、FG交于点M，延长AB、FE交于点N，如下图所示： $(2+4) \times (2+4) - 4 \times (2+4) \div 2 - 4 \times (2+4) \div 2 - 2 \times 2 \div 2 = 6 \times 6 - 4 \times 6 \div 2 - 4 \div 2 = 36 - 24 \div 2 - 24 \div 2 - 2 = 36 - 12 - 12 - 2 = 24 - 12 - 2 = 12 - 2 = 10$.



3. 【答案】600 平方厘米.

【格木解析】 $(10+30) \times (10+20+30) \div 2 - 10 \times (10+20) \div 2 - 30 \times 30 \div 2 = 40 \times (30+30) \div 2 - 10 \times 30 \div 2 - 900 \div 2 = 40 \times 60 \div 2 - 300 \div 2 - 450 = 2400 \div 2 - 150 - 450 = 1200 - 150 - 450 = 1050 - 450 = 600$ (平方厘米).

4. 【答案】37.68.

【格木解析】 $3.14 \times 48 \div 4 = 3.14 \times 12 = 37.68$ (cm^2).

5. 【答案】100.

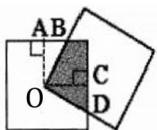
【格木解析】2 分米=20 厘米, 根据分析可知: 阴影部分的周长与长方形的周长相等, 所以阴影部分的周长是: $(30+20) \times 2 = 50 \times 2 = 100$ (厘米)

6. 【答案】251.2.

【格木解析】底面半径: $12.56 \div 3.14 \div 2 = 4 \div 2 = 2$ (厘米), 圆柱的高: $80 \div 2 \div 2 = 40 \div 2 = 20$ (厘米), 圆柱的体积: $3.14 \times 2^2 \times 20 = 3.14 \times 4 \times 20 = 12.56 \times 20 = 251.2$ (立方厘米).

7. 【答案】20.

【格木解析】标注字母并做出辅助线: 根据正方形的性质可得 $OA=OC$, $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 形状大小完全相同, 可以将 $\triangle COD$ 割补到 $\triangle AOB$ 的位置, 因此阴影部分面积就是正方形面积的 $1/4$, 正方形面积就是重叠部分的面积 $\times 4$, 即: $5 \times 4 = 20$ (平方厘米)



8. 【答案】38.56.

【格木解析】 $10 + 3.14 \times 4 + 4 \times 4 = 10 + 12.56 + 16 = 38.56$ (厘米).

第三章 统计与可能性

一、选择题

1. 【答案】B.

【格木解析】根据折线统计图的特点可以知道要反映身高变化情况选用折线统计图比较合适.

2. 【答案】A.

【格木解析】条形统计图很容易看出各种数量的多少.

3. 【答案】C.

4. 【答案】C.

【格木解析】根据偶然事件与必然事件的定义可知：A 应为偶然事件，B 应为不可能事件，D 应为抽样调查的方式.

5. 【答案】D.

【格木解析】质数为 2, 3, 5, 7.

6. 【答案】D.

【格木解析】奇数是 1, 3, 5, 7, 9. 偶数是 2, 4, 8, 10, 12. ∴ 甲、乙胜的概率均是 $1/2$.

7. 【答案】B.

【格木解析】设当中奖数字是一位数 3 时，共 1 种；中奖数字为两位数时，十位上的数字为 3，个位数有 10 种，个位数字为 3，十位数字不是 3 时，有 8 种（除了 0），所以两位数共 18 种；中奖数字为三位数时，百位数 2 种（1 或 2），十位数字是 3，个位 10 种，共 20 种，十位数字不是 3（9 种），个位数字为 3，共 18 种，再考虑上 300 这个数，所以三位数共 39 种；共有 $1+18+39=58$ 种，概率为 $\frac{58}{300} = \frac{29}{150}$ ，正确选项为 B.

8. 【答案】D.

【格木解析】 $(80+90+79+69+74+86+x+81) \div 8 = 80$ ，所以 $x=81$ ，正确选项为 D.

9. 【答案】D.

【格木解析】 不妨设不及格学生人数为 1，则及格人数为 5，及格学生的平均成绩为：

$$\frac{6 \times 80 - 1 \times 30}{5} = 90, \text{ 选 D}$$

10. 【答案】A.

【格木解析】 把一组数据按从小到大的数序排列，在中间的一个数字（或两个数字的

平均值)叫作这组数据的中位数.

11. 【答案】C.

二、填空题

1. 【答案】11; 8.

【格木解析】平均数为 $(3+5+6+8+9+22+24) \div 7 = 77 \div 7 = 11$; 这组数据按照从小到大的顺序排列为: 3、5、6、8、9、22、24, 中位数就是 8.

2. 【答案】2415; 2500; 2500.

【格木解析】平均数 = $(3000 \times 2 + 2800 \times 4 + 2500 \times 7 + 2000 \times 5 + 1800 \times 2) \div (2+4+7+5+2) = 2415$; 一共 20 个数据, 中位数是第 10 个和 11 个的平均数, 即为 2500; 众数为 2500.

3. 【答案】 $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{2}$

4. 【答案】(1) $\frac{1}{6}$; (2) $\frac{1}{3}$; (3) $\frac{1}{2}$

三、解答题

1. 【答案】(1) 不公平, 小刚赢的可能性为 $\frac{7}{15}$, 小强赢的可能性为 $\frac{8}{15}$; (2) 小刚不一定输.

2. 【答案】9 种.

【格木解析】先排甲, 有 3 种。①如果甲在乙的位置, 则排乙有 3 种, 根据乙的每种位置, 丙、丁的位置唯一确定; ②如果甲在丙的位置, 则排丙有 3 种, 根据丙的每种位置, 乙、丁的位置唯一确定; ③如果甲在丁的位置, 则排丁有 3 种, 根据丁的每种位置, 乙、丙的位置唯一确定。所以一共 $3+3+3=9$ 种。

第四章 应用题

一、选择题

1. 【答案】C.

【格木解析】 $(440+160) \div 20 = 600 \div 20 = 30$ (秒)，所以火车通过大桥需要 30 秒。故答案为 C.

2. 【答案】D.

【格木解析】 设“王子树”有 x 棵，“公主树”有 y 棵，则由题意得： $8x + 10y = 164$ ，所以 $4x + 5y = 82$ ，即绿苹果有 82 个。故本题选 D。

3. 【答案】B.

【格木解析】 假设兔子增加 12 只，则鸡和兔的只数同样多，则：兔子的腿数是鸡的 $4 \div 2 = 2$ 倍，鸡的腿数： $(84+12 \times 4) \div (1+2) = 132 \div 3 = 44$ (条)，鸡： $44 \div 2 = 22$ (只)，兔子： $22-12=10$ (只)，故本题选 B.

4. 【答案】C.

【格木解析】 $(65-5) \times 2 = 60 \times 2 = 120$ (张)，故本题选 C.

5. 【答案】A.

【格木解析】 甲乙 1 天完成的工作量： $\left(\frac{1}{96} + \frac{1}{80}\right) \times 8 = \frac{31}{180}$ ，甲丙 1 天完成的工作量： $\left(\frac{1}{96} + \frac{1}{80}\right) \times 8 = \frac{11}{60}$ ，乙丙 1 天完成的工作量： $\left(\frac{1}{90} + \frac{1}{80}\right) \times 8 = \frac{17}{90}$ ，三组先工作 3 天剩下的工作量： $1 - \frac{31}{180} - \frac{11}{60} - \frac{17}{90} = \frac{41}{90}$ ，甲乙再合作 1 天剩下的工作量： $\frac{41}{90} - \frac{31}{180} = \frac{51}{180}$ ，甲丙再合作 1 天剩下的工作量： $\frac{51}{180} - \frac{11}{60} = \frac{1}{10}$ ，剩下的工作量由乙丙再合作的时间为： $\frac{1}{10} \div \frac{17}{90} = \frac{9}{17}$ (天)，乙工作的总时间为： $3 + \frac{9}{17} = 3\frac{9}{17}$ (天)， $3\frac{9}{17} \times 8 = 28\frac{4}{17}$ (小时)，故本题选 A.

6. 【答案】B.

【格木解析】 设新购买纯电动汽车每行驶 1 千米所需的电费为 x 元，则原来的燃油汽车所需的油费为 $(x+0.54)$ 元。 $\frac{108}{x+0.54} = \frac{27}{x}$ ， $27 \times (x+0.54) = 108x$ ， $27x+0.54 \times 27 = 108x$ ， $108x-27x=14.58$ ， $81x=14.58$ ， $x=14.58 \div 81$ ， $x=0.18$ ， $27 \div 0.18=150$ (千米)，故本题选 B.

7. 【答案】B.

【格木解析】 假设进价为 x 元，列方程： $(x+350) \div 0.9 = (x-200) \div 0.7$ ， $(x+350) \times 0.7 = (x-200) \times 0.9$ ， $0.9x-0.7x=350 \times 0.7+200 \times 0.9$ ， $0.2x=425$ ， $x=2125$ ，故本题选 B.

8. 【答案】C.

【格木解析】用五个点分别表示参加比赛的五个人，如果某两人已经赛过，就用线段把代表这两个人的点连接起来：因为小林已经下了4盘，除了小林以外还有4个点，所以小林和其他4个点都有线段相连；因为小兵下了1盘，所以只有与小林有线段相连；因为小强下了3盘，除了小兵之外，与其他3个点都有线段相连；因为小芳下了2盘，根据连线可知这两盘是跟小林和小强下过，由图可清楚地看出，小东下了2盘，分别是与小林、小强下的，故本题选C.

9. 【答案】B.

【格木解析】自动扶梯的速度： $[40 \times 2 - 3 \times (50 \div 2)] \div (50 - 40) = [40 \times 2 - 3 \times 25] \div 10 = [80 - 75] \div 10 = 5 \div 10 = 0.5$ (级)， $(0.5 + 2) \times 40 = 2.5 \times 40 = 100$ (级)，所以，当该扶梯静止时，可看到的扶梯有100级. 故本题选B.

10. 【答案】A.

【格木解析】淘气和笑笑每小时折纸鹤的个数比是6:5，则每分钟折纸鹤的个数比也是6:5； $6:5 = 30:25$ ，可知，淘气折30个纸鹤时，笑笑折25个纸鹤；笑笑做一个纸鹤用时：

$2 \div (25 - 24) = 2 \div 1 = 2$ (分钟)，则淘气做一个纸鹤用时： $\frac{25 \times 2}{30} = \frac{5}{3}$ (分钟)，故本题选A.

11. 【答案】A.

【格木解析】假设妍妍全答对了，则得分为： $12 \times 5 = 60$ (分)，比她实际上的分20分多： $60 - 20 = 40$ (分)，答对一题加5分，答错一题扣3分，那么答对1题比答错1题多的分为： $5 + 3 = 8$ (分)，所以她答错的题数为： $40 \div 8 = 5$ (题). 故正确答案为A.

12. 【答案】C.

【格木解析】货车行了全程的： $1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$ ，两车速度比为 $\frac{7}{13} : \frac{6}{13} = 7:6$ ，故本题选C.

13. 【答案】B.

【格木解析】 $1200 \div 40 = 30$ (分)， $1200 \div 60 = 20$ (分)， $(1200 + 1200) \div (30 + 20) = 2400 \div 50 = 48$ (米). 故本题选B.

14. 【答案】A.

【格木解析】 \because 甲的效率=乙丙的效率和， \therefore 甲的效率： $\frac{1}{10} \div 2 = \frac{1}{20}$ ，丙的效率：

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{1+5} = \frac{1}{60}$ ，乙的效率： $\frac{1}{20} - \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$ ，乙单独需要： $1 \div \frac{1}{30} = 30$ (天)，故本题选A.

15. 【答案】D.

【格木解析】假设每部抽水机每小时抽一份水，10部抽水机20小时抽水： $10 \times 20 =$ 原有的水+20小时新加增的水①，15部抽水机10小时抽水： $15 \times 10 =$ 原有的水+10小时新加增的水②，由①-②，可得每小时新加增的水是： $(10 \times 20 - 15 \times 10) \div (20 - 10) = 5$ （份），原有的水： $10 \times 20 - 5 \times 20 = 100$ （份），用5部抽水机抽每小时增加的水，其余20部抽原有水： $100 \div (25 - 5) = 5$ （小时），即用25部抽水机5小时可以把水抽干；故本题选D.

16. 【答案】C.

【格木解析】 $12 \times (12 - 1) \div 2 = 132 \div 2 = 66$ （局），一共要赛66局. 故本题选C.

17. 【答案】B.

【格木解析】弹珠共4个颜色；如果取出的弹珠颜色都不重复，最多可以取出4粒；所以一定有2个颜色重复的弹珠数是： $4 + 1 = 5$ （个）. 故本题选B.

18. 【答案】B.

【格木解析】根据第n个图形中面积为1的正方形有 $\frac{n(n+3)}{2}$ ；则第(6)个图形中面积为1的正方形的个数有 $\frac{6 \times (6+3)}{2} = 27$ （个）. 故本题选B.

19. 【答案】B.

【格木解析】假设这两件商品的售价都是110元： $110 + (1+10\%) = 110 \div 1.1 = 100$ （元）， $110 + (1-10\%) = 110 \div 0.9 \approx 122.22$ （元）， $110 \times 2 = 220$ （元）， $100 + 122.22 = 222.22$ （元）， $222.22 > 220$ 元，所以是亏损的. 故答案选B.

20. 【答案】A.

【格木解析】甲的效率： $\frac{1}{10}$ ，乙的效率： $\frac{1}{15}$ ，设甲停工了x小时： $\frac{1}{10} \times (7 - x) + \frac{1}{15} \times 7 = 1$ ， $\frac{7}{10} - \frac{1}{10}x + \frac{7}{15} = 1$ ， $1 + \frac{1}{10}x = \frac{7}{6}$ ， $\frac{1}{10}x = \frac{1}{6}$ ， $x = 1\frac{2}{3}$. 故本题选A.

21. 【答案】B.

【格木解析】 $(80 + 1) \div (4 + 4 + 1) = 81 \div 9 = 9$ （岁），则小倩今年9岁，故本题选B.

22. 【答案】B.

【格木解析】前2张烙2面，用时间8分钟. 剩下3张：将剩下的3张编号①、②、③；第一次：放①的正面和②的正面，4分钟；第二次：放①的反面和③的正面，4分钟；第三次：放②的反面和③的反面，4分钟； $8 + 3 \times 4 = 8 + 12 = 20$ ，共用20分钟. 故本题选B.

23. 【答案】A.

【格木解析】 $5 - 1 = 4$ （锯）， $4 \times 3 = 12$ （分钟），故本题选A.

24. 【答案】C.

二、填空题

1. 【答案】12:5.

2. 【答案】15; 62.

【格木解析】小朋友数为 $(17+13) \div (5-3)=15$, 糖数为 $3 \times 15+17=62$.

3. 【答案】16; 14.

【格木解析】假设全部是鸡，则有 60 只脚，比原有脚数少了 $88-60=28$ (只)，所以兔子只数为 $28 \div 2=14$ (只)，所以鸡的只数为 $30-14=16$ (只).

4. 【答案】9.

【格木解析】小丽所占的份数为 $1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, 所以总人数为 12 人, 小丽在 $12 \times \frac{2}{3}+1=9$ 名。

5. 【答案】2800.

【格木解析】 $1200 \div \left[1-\frac{1}{4}-(1-\frac{1}{4}) \times \frac{3}{7}\right]=2800$ (件).

三、解答题

1. 【答案】130.

【格木解析】设甲商品成本为 x 元，则乙商品成本为 $(200-x)$ 元，则：

$[(1+30\%)x+(1+20\%)(200-x)] \times 90\%=200+27.7$, 解得 $x=130$. 故甲商品的成本为 130 元.

2. 【答案】5.

【格木解析】设每个检票口每分钟的检票人数为 1 个单位，每分钟来的人数为

$\frac{1 \times 20 - 2 \times 8}{20-8} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ 个单位，检票口原有的人数为 $20 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{40}{3}$ 个单位. 需要的时间为

$\frac{40}{3} \div \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 5$ (分钟).

3. 【答案】20 岁

【格木解析】设女儿现在的年龄是 x ，则母亲现在的年龄是 $68-x$ ，根据题意，当女儿

的年龄是 $\frac{1}{4}(68-x)$ 时，母亲的年龄是 $2x$. 根据年龄差不变，得出结论： $68-x-x=2x-\frac{1}{4}(68-x)$ ，

解得 $x=20$.

4. 【答案】27 只鸽子，4 个鸽笼.

【格木解析】设原有鸽子 x 只，鸽笼 y 个. 根据题意可知： $\begin{cases} 6y+3=x \\ x+5=8y \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=27 \\ y=4 \end{cases}$,

所以原有 27 只鸽子，4 个鸽笼.

5. 【答案】赚钱，赚了 1.2 元.

【格木解析】设第一次批发价为 x 元，购买数为 y 本，由题意得 $\begin{cases} xy=100 \\ (2.8-x)y=40 \end{cases}$ ，解得

$\begin{cases} x=2 \\ y=50 \end{cases}$ ，所以第二次批发价为 2.5 元，购买数为 $\frac{150}{2.5}=60$ 本. 又因为第二次书卖到 $\frac{4}{5}$ 时滞销，

以定价的 5 折出售，所以卖出的金额为： $2.8 \times \frac{4}{5} \times 60 + 2.8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times 60 = 151.2$ 元，买书花费的金额为 150 元，所以赚了 1.2 元.

6. 【答案】75.6 吨.

【格木解析】 $84 \times (1-10\%)=75.6$ (吨).

7. 【答案】99 分.

【格木解析】总分： $92 \times 3=276$ (分)， $276-86-91=99$ (分)

8. 【答案】216 立方分米.

【格木解析】由长与宽的比为 4:3， $4+3=7$ ， $28 \div 2=14$ (分米)，长为 $14 \div 7 \times 4=8$ (分米)，宽为 $14 \div 7 \times 3=6$ (分米)，体积： $6 \times 8 \times 4.5=216$ (立方分米).

9. 【答案】甲每分钟 75 米，乙每分钟 60 米.

【格木解析】两人的速度之和： $1350 \div 10=135$ (米/分钟)，两人的速度之差： $1350 \div (80+10)=1350 \div 90=15$ (米/分钟)，甲的速度： $(135+15) \div 2=150 \div 2=75$ (米/分钟)，乙的速度： $135-75=60$ (米/分钟).

10. 【答案】(1) 24 米，(2) 127.62 平方米.

【格木解析】(1) $(34-2 \times 2) \div 3 \times 2+2 \times 2=10 \times 2+4=24$ (米). (2) AB 长： $(34-2 \times 2) \div 3=10$ (米)，BD 长： $10+2=12$ (米)，面积：

$$3.14 \times (12^2 - 10^2) \times \frac{3}{4} + (24 \div 2) \times 2 = 3.14 \times 44 \times \frac{3}{4} + 24 = 127.62 \text{ (平方米)}$$

11. 【答案】得分最低者最少得 50；得分最低者最多得 77 分，

【格木解析】考虑两种极端情况：(1) 要使得分最低者分数尽可能低，在五名选手总分一定的条件下，应该是前四名领先第五名的分数尽可能多. 第一名 90，第二、三、四名的成绩接近但又不相等，即 89, 88, 87，所以得分最低者最少得 $404-(90+89+88+87)=50$ (分)；(2) 同理可得，得分最低者最多得 $[404-90-(1+2+3)] \div 4=77$ (分).

12. 【答案】192 米/分钟.

【格木解析】设山脚到山顶的距离是 x 米.

$$4x \div \left(\frac{x}{200} + \frac{x}{240} + \frac{x}{150} + \frac{x}{200} \right) = 4 \div \left(\frac{1}{200} + \frac{1}{240} + \frac{1}{150} + \frac{1}{200} \right) = 4 \div \frac{5}{240} = 192 \text{ (米/分钟). 小王的平均速度是每分钟 192 米.}$$

13. 【答案】40; 760.

【格木解析】农药: $(800 \times 1.75\%) \div 35\% = 40$ (千克); 水: $800 - 40 = 760$ (千克). 需要用 40 千克浓度为 35% 的农药, 加入 760 千克水才能配制.

14. 【答案】300 千米.

$$\begin{cases} \frac{140}{x} = \frac{S-140}{y} \\ \frac{S+0.4S}{x} = \frac{S+0.6S}{y} \end{cases}$$

【格木解析】设 AB 相距 S 千米, 客车速度为 x, 货车速度为 y, 则两式相除, 可得 $S=300$, 即 AB 两地距离为 300 千米.

15. 【答案】258 页.

【格木解析】1~9 页共有 9 个数字, 10~99 页共有 $2 \times 90 = 180$ 个数字, 页码包含三个数字的有 $(666 - 180 - 9) \div 3 = 159$ 页, 所以该书一共有 $9 + 90 + 159 = 258$ 页.

$$\frac{360}{11}$$

16. 【答案】 $\frac{360}{11}$ 分钟.

【格木解析】第一次重合, 分针要追时针 180° , 所以: 追及时间 = 追及距离 ÷ 速度差, 即: $180 \div (6 - 0.5) = 360 \div 11 = \frac{360}{11}$ 分钟。

17. 【答案】899 米.

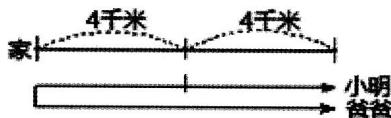
【格木解析】 $3.6 \text{ km/h} = 1 \text{ m/s}$, 设火车长为 l 米, 则 $\frac{l}{29} - 1 = \frac{l}{31} + 1$, 解得 $l = 899$

18. 【答案】900 米.

【格木解析】要求距离, 速度已知, 所以关键是求出相遇时间. 从题中可知, 在相同时间(从出发到相遇)内, 哥哥比妹妹多走 (180×2) 米, 这是因为哥哥比妹妹每分钟多走 $(90 - 60)$ 米, 那么, 两人从家出发到相遇所用时间为: $180 \times 2 \div (90 - 60) = 12$ (分钟), 家离学校的距离为: $90 \times 12 - 180 = 900$ (米)

19. 【答案】8 点 32 分.

【格木解析】画一张简单的示意图:



图上可以看出, 从爸爸第一次追上到第二次追上, 小明骑了 $8 - 4 = 4$ (千米). 而爸爸骑的

距离是 $4+8=12$ (千米). 这就可以知道, 爸爸骑摩托车的速度是小明骑自行车速度的 $12 \div 4=3$ 倍. 按照这个倍数计算, 小明骑 8 千米, 爸爸可以骑行 $8 \times 3=24$ (千米). 但事实上, 爸爸少用了 8 分钟, 骑行了 $4+12=16$ (千米), 少骑行 8 千米. 摩托车的速度是 $8 \div 8=1$ (千米/分), 爸爸骑行 16 千米需要 16 分钟, $8+8+16=32$ (分钟), 所以这时是 8 点 32 分。

20. 【答案】一班植树 128 棵; 二班植树 132 棵; 三班植树 148 棵; 四班植树 152 棵.

【格木解析】总份数为 $32+33+37+38=140$, 一班植树 $560 \div 140 \times 32=128$ (棵), 二班植树 $560 \div 140 \times 33=132$ (棵), 三班植树 $560 \div 140 \times 37=148$ (棵), 四班植树 $560 \div 140 \times 38=152$ (棵).

21. 【答案】9 小时.

【格木解析】甲船速+水速= $360 \div 10=36$, 甲船速-水速= $360 \div 18=20$, 可见 $(36-20)$ 相当于水速的 2 倍, 所以, 水速为每小时 $(36-20) \div 2=8$, 又因为, 乙船速-水速= $360 \div 15$, 所以, 乙船速为 $360 \div 15+8=32$, 乙船顺水速为 $32+8=40$, 所以, 乙船顺水航行 360 千米需要 $360 \div 40=9$ (小时)

22. 【答案】25 头.

【格木解析】

(1) 求草每天的生长量:

因为, 一方面 20 天内的草总量就是 10 头牛 20 天所吃的草, 即 $(1 \times 10 \times 20)$; 另一方面, 20 天内的草总量又等于原有草量加上 20 天内的生长量, 所以 $1 \times 10 \times 20=\text{原有草量}+20$ 天内生长量. 同理 $1 \times 15 \times 10=\text{原有草量}+10$ 天内生长量, 由此可知 $(20-10)$ 天内草的生长量为 $1 \times 10 \times 20-1 \times 15 \times 10=50$, 因此, 草每天的生长量为 $50 \div (20-10)=5$.

(2) 求原有草量:

原有草量= 10 天内总草量- 10 天内生长量= $1 \times 15 \times 10-5 \times 10=100$.

(3) 求 5 天内草总量:

5 天内草总量=原有草量+5 天内生长量= $100+5 \times 5=125$.

(4) 求多少头牛 5 天吃完草:

因为每头牛每天吃草量为 1, 所以每头牛 5 天吃草量为 5. 因此 5 天吃完草需要牛的头数 $125 \div 5=25$ (头).

23. 【答案】12 小时

【格木解析】记每台机器每小时抽水 1 个单位, 则每小时积水 $(8 \times 6-10 \times 4) \div (6-4)=4$ 个单位, 原积水 $8 \times 6-4 \times 6=24$ 个单位, 用 6 台机器排水需 $24 \div (6-4)=12$ 小时

24. 【答案】15 小时.

【格木解析】分析知道甲车相当于“牛”, 甲追赶上乙的追及路程相当于“原有草量”,

乙车相当于“新生长的草”. 设甲车的速度为“1”, 那么乙车 $5-3=2$ 小时走的路程为 $2 \times 5-3 \times 3=1$, 所以乙的速度为 $1 \div 2=0.5$, 追及路程为: $(2-0.5) \times 5=7.5$. 如果甲以现在的速度追上乙, 追上的时间为: $7.5+(1-0.5)=15$ (小时).

25. 【答案】需要 6 个进水管.

【格木解析】设每个同样的进水管每小时注水量为 1, 则 4 个进水管 5 小时注水量为 $(1 \times 4 \times 5)$, 2 个进水管 15 小时注水量为 $(1 \times 2 \times 15)$, 从而可知: 每小时的排水量为 $(1 \times 2 \times 15-1 \times 4 \times 5) \div (15-5)=1$, 即一个排水管与每个进水管的工作效率相同, 由此可知一池水的总工作量为 $1 \times 4 \times 5-1 \times 5=15$, 又因为在 3 小时内, 每个进水管的注水量为 1×3 , $(15+1 \times 3) \div (1 \times 3)=6$, 所以, 3 小时内注满一池水, 需要 6 个进水管.

26. 【答案】甲 42 岁, 乙 23 岁.

【格木解析】这里涉及三个年份: 过去某一年, 今年, 将来某一年. 列表分析:

	甲	乙
过去某一年	□岁	4 岁
今年	△岁	□岁
将来某一年	61 岁	△岁

表中两个“□”表示同一个数, 两个“△”表示同一个数. 因为两个人的年龄差总相等: $\square-4=\triangle-\square=61-\triangle$, 所以 61 应该比 4 大 3 个年龄差, 因此二人年龄差为 $(61-4) \div 3=19$ (岁), 甲今年的岁数为 $\triangle=61-19=42$ (岁), 乙今年的岁数为 $\square=42-19=23$ (岁).

27. 【答案】169.

【格木解析】由题知, 正方形的一边的人数为 13 人, 所以一共 $13 \times 13=169$ 人.

28. 【答案】甲数=28; 乙数=52; 丙数=90.

【格木解析】乙丙两数都与甲数有直接关系, 因此把甲数作为 1 倍量, 因为乙比甲的 2 倍少 4, 所以给乙加上 4, 乙数就变成甲数的 2 倍; 又因为丙比甲的 3 倍多 6, 所以丙数减去 6 就变为甲数的 3 倍; 这时 $(170+4-6)$ 就相当于 $(1+2+3)$ 倍. 那么, 甲数= $(170+4-6) \div (1+2+3)=28$, 乙数= $28 \times 2-4=52$, 丙数= $28 \times 3+6=90$.

第五章 小数奥数

练习 A

一、选择题

1. A

【格木分析】由于每人骑车的速度相等，6个人一起从甲地到乙地旅游需3天，路程一定的情况下，时间只和速度有关系，和人数没有关系，则不论几人从甲地骑车到乙地都要3天，所以12人一起从甲地骑车到乙地要3天。完成本题的关键是要排除惯性思维的影响，看到6与12就想到倍数关系。

【详解】由于每人骑车的速度相等，6个人一起从甲地到乙地旅游需3天，那么12人一起从甲地骑车到乙地也要3天。

故选A.

2. B

【格木分析】因为要铺高20厘米、厚5厘米的砖边，砖块的长可作为砖边的高，砖块的厚度作为砖边的厚度；先计算出两条长所需要的砖块数量，即 $300 \div 10 \times 2$ ，再计算宽需要的砖块数量时，需要减去长的厚度，即 $(200 - 5 \times 2) \div 10 \times 2$ ，由此解答即可。

【详解】3米=300厘米，2米=200厘米；

$$300 \div 10 \times 2 + (200 - 5 \times 2) \div 10 \times 2$$

$$= 60 + 38$$

$$= 98 \text{ (块)}$$

故答案为：B。

【点睛】明确砖边的高和厚可以用砖长和厚代替以及计算宽需要的砖块数量时需要减去长的厚度，是解答本题的关键。

3. B

【详解】试题分析：根据容积的意义，容器所能容纳物体的体积叫做容器的容积，水的总体积不变，倒满的杯子越多，则杯子的容积越小；由此解答即可。

解：因为1号杯倒正好3杯，2号杯倒不满3杯，3号杯倒满3杯还多一点，所以2号杯的容量最大；

故选B.

【点评】此题考查了体积、容积及其单位，明确在水的体积一定的情况下，倒满的杯子越多，则杯子的容积越小。

二、填空题

1. 2 16

【详解】6时敲响6下，间隔数是： $6 - 1 = 5$ （次）

每次间隔时间是： $10 \div 5 = 2$ （秒）

敲响9下，间隔数是： $9 - 1 = 8$ （次）

需要的时间是： $8 \times 2 = 16$ （秒）；

答：敲钟间隔一次用2秒。9时敲9下，16秒钟敲完。

故答案为2，16。

2. 30

【详解】略

3. 165

【格木分析】设原计划每天生产11份，则实际每天生产5份加10件，而根据题意这批产品共有 $11 \times 15 = 165$ 份，所以实际每天生产 $165 \div (15 - 4) = 15$ 份，所以15份与5份加10件的和相同，所以每份就是1件，所以这批产品共有165件。

【详解】假设原计划每天生产11份，那么实际每天生产5份加10；

产品共有份数： $11 \times 15 = 165$ （份）

实际每天生产： $165 \div (15 - 4) = 165 \div 11 = 15$ （份）

5份+10=15份，每份为1件。

产品总量为： $1 \times 165 = 165$ （件）

【点睛】本题考查了工作总量、工作效率与工作时间之间的关系的灵活运用，首先根据已知条件将原计划每天生产的量看作11份，求出每一份代表的量是多少是关键。

4. 320

【格木分析】买4棵送1棵，买回20棵，实际只需要支付16棵的价钱，有4棵是赠送的，20乘16即可。

【详解】 $4 + 1 = 5$

$20 \div 5 = 4$

$4 \times 4 = 16$ （棵）

$20 \times 16 = 320$ （元）

【点睛】对于买四送一、买五送一这种问题，关键是确定实际购买了多少，赠送了多少。

5. 5

【详解】略

6. 33

【详解】略

7. 8

【格木分析】可以设最后剩下的男、女生人数为未知数，表示出最初的人数，根据总人数是 76 人列方程求解。

【详解】解：设最后剩下的男、女生人数都是 x 人；

$$2x + x + 13 = 76$$

$$x = 21$$

$$21 \times 2 = 42 \text{ (人)}$$

$$21 + 13 = 34 \text{ (人)}$$

$$42 - 34 = 8 \text{ (人)}$$

【点睛】列方程是求解应用题最常用的方法，关键是合理设未知数，准确找出等量关系。

8. 12

【详解】略

9. 80

【格木分析】根据题意，设未知数列式计算，找出甲、乙分得桃子的总数比，

【详解】解：设甲的总数为 x 个，乙的总数为 y 个，则：

$$(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5}) x = (1 - \frac{1}{5} - (1 - \frac{1}{5}) \times \frac{1}{5}) y$$

$$\frac{3}{5}x = (1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}) y$$

$$\frac{3}{5}x = (1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{25}) y$$

$$\frac{15}{25}x = \frac{16}{25}y$$

所以， $x : y = 16 : 15$

那么甲、乙的桃子可能为 16, 15; 32, 30; 48, 45; 64, 60; 80, 75; 96, 90; 112, 105; 又因为甲和乙的总数为 100 多个。

所以可能为：64, 60; 80, 75; 96, 90; 又因为甲每次吃它的总数的 $\frac{1}{5}$ ，乙第一次吃了它的总数的 $\frac{1}{5}$ ，第二次吃了剩下的 $\frac{1}{5}$ 。

所以甲、乙拥有的桃子个数一定是 5 的倍数（只有 80 是 5 的倍数，75 是 5 的倍数）

那么只能是 80, 75;

$$\begin{aligned}
 & 80 - 80 \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \\
 & = 80 - 80 \times \frac{2}{5} \\
 & = 80 - 32 \\
 & = 48 \text{ (个)} \\
 & 75 - 75 \times \left(1 - \frac{1}{5} \right) - 75 \times \left(1 - \frac{1}{5} \right) \times \frac{1}{5} \\
 & = 75 - 75 \times \frac{1}{5} - 75 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} \\
 & = 75 - 15 - 12 \\
 & = 48 \text{ (个)}
 \end{aligned}$$

所以，甲原有桃子 80 个。

【点睛】找出甲、乙分得桃子的总数比，是解答此题的关键。

10. 55

【格木分析】里程表上的数字表示从两面读它们是一样的，也就是万位数字和个位一样，千位数字和十位一样，我们称为“回文数”，找出下一个回文数即可，而下一个符合要求的数肯定大于 15951，由于时速不超过 100 千米，所以小于 16151，从这个区间中找。

【详解】大于 15951 且小于 16151 的回文数只有 16061；

$16061 - 15951 = 110$ (千米)

$110 \div 2 = 55$ (千米/小时)

【点睛】本题主要考查的是“回文数”的定义，明白这个新定义的意思是解题的关键。

11. 3

【格木分析】大汽车 5 天可以把仓库装满，则大汽车 5 天装了 $45+5=50$ 天用棉量，求得大汽车 1 天装的棉量，同理求得小汽车 1 天的装棉量，同时运棉，空仓库储棉量除以（共同运棉量减去车间生产用棉量）就可以得到答案。

这道题牵扯到既要往仓库运货，又要往车间供货，要注意把车间供货那部分计算进去。

【详解】大汽车 1 天装棉量： $(45+5) \div 5 = 10$ (天)

小汽车 1 天装棉量： $(45+9) \div 9 = 6$ (天)

同时运棉，装满仓库需要的天数： $45 \div (10+6 - 1) = 3$ (天)

故答案为 3.

12. 15

【详解】略

13. 0.018

【格木分析】1日1夜是24小时，首先把24时化成秒数，用24乘单位间的进率3600；然后把1日1夜化成一刹那，乘逐级间的进率： $30 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20$ ，要求一刹那等于多少秒，用除法，即可得解。

$$\text{【详解】} 3600 \times 24 = 86400 \text{ (秒)}$$

$$30 \times 20 \times 20 \times 20 \times 20 = 4800000 \text{ (刹那)}$$

$$86400 \div 4800000 = 0.018 \text{ (秒)}$$

所以，一刹那是0.018秒。

【点睛】本题主要考查了时间的推算，求出一日一夜有多少秒，有多少刹那，然后用除法来解决问题。

14. 8

【详解】无论今年还是a年后，丹丹和爸爸的年龄差是不变的。

$$a \text{ 年后年龄差为: } 28 - 4 = 24 \text{ (岁)}$$

$$a \text{ 年后丹丹年龄: } 24 \div (3 - 1) = 12 \text{ (岁)}$$

$$a \text{ 就为: } 12 - 4 = 8 \text{ (年)}.$$

15. 630

【格木分析】先用525乘6计算出疫苗的总数量，然后用6减1计算出接种的时间，最后用疫苗的总数量除以接种的时间即可。

$$\text{【详解】} 525 \times 6 \div (6 - 1)$$

$$= 525 \times 6 \div 5$$

$$= 3150 \div 5$$

$$= 630 \text{ (针)}$$

所以，现在每小时要接种630针。

【点睛】此题考查的是归总问题的计算，先计算出疫苗的总数量是解答此题的关键。

16. 125

【格木分析】根据题意，先求出买4个台灯和4个插座需要的钱数，再求出一盏台灯和一个插座需要的钱即可。

【详解】买4个台灯和4个插座需要的钱数是： $300 + 200 = 500$ （元）；

所以，买一盏台灯和一个插座需付： $500 \div 4 = 125$ （元）。

【点睛】解答此题的关键是，买同样数目的台灯和插座需付多少元。

17. 2.5 1.5

【格木分析】3袋盐和5袋醋共15元，那么如果买5份这样的，即15袋盐和25袋醋共

75 元；5 袋盐和 3 袋醋共 17 元，那么如果买 3 份这样的，即 15 袋盐和 9 袋醋共 51 元；所以 16 袋醋共 24 元，每袋醋 1.5 元，所以每袋盐 2.5 元。

【详解】因为 3 袋盐和 5 袋醋共 15 元，

所以如果买 5 份这样的，即 15 袋盐和 25 袋醋共 75 元；

因为 5 袋盐和 3 袋醋共 17 元，

所以如果买 3 份这样的，即 15 袋盐和 9 袋醋共 51 元；

所以 16 袋醋共： $75 - 51 = 24$ (元)，

每袋醋： $24 \div 16 = 1.5$ (元)，

所以每袋盐：

$$(15 - 5 \times 1.5) \div 3$$

$$= 7.5 \div 3$$

$$= 2.5 \text{ (元)}$$

所以，每袋盐 2.5 元，每袋醋 1.5 元。

【点睛】解答此题的关键是根据题意找出等量关系，再利用等量代换的方法解答即可。

18. 7.4

【格木分析】买 2 条毛巾，3 块肥皂，要付 18 元；买 3 条毛巾，2 块肥皂，要付 19 元，那么买 5 条毛巾，5 块肥皂，要付 $(18 + 19)$ 元，所以买 1 条毛巾，1 块肥皂要付 7.4 元。

【详解】 $(18 + 19) \div 5$

$$= 37 \div 5$$

$$= 7.4 \text{ (元)}$$

所以，买 1 条毛巾，1 块肥皂要付 7.4 元。

【点睛】找出 1 条毛巾、1 块肥皂价钱的倍数，是解答此题的关键。

19. 2.7

【格木分析】根据题意可知，买 $(3+8)$ 斤苹果和 $(2+9)$ 斤苹果。需要： $6.9 + 22.8 = 29.7$ (元)；所以各买 1 斤需要： $29.7 \div 11 = 2.7$ 元。

【详解】 $3+8=11$ (斤)

$$2+9=11 \text{ (斤)}$$

$$(6.90 + 22.80) \div 11$$

$$= 29.7 \div 11$$

$$= 2.7 \text{ (元)}$$

所以，苹果、桔子各买 1 斤需 2.7 元。

【点睛】找出 1 斤苹果和 1 斤桔子的价钱的倍数，是解答此题的关键。

20. 10

【格木分析】设一个同学一天完成 1 份工作量，那么总工作量为： $1 \times 60 = 60$ （份），增加的 15 个同学两天完成的工作量为： $15 \times 2 = 30$ （份），那么剩下的工作量即为艺术小组 3 天的工作量，所以人数为： $(60 - 30) \div 3 = 10$ （位）。

【详解】设一个同学一天完成 1 份工作量，则：

$$(1 \times 60 - 15 \times 2) \div 3$$

$$= (60 - 30) \div 3$$

$$= 30 \div 3$$

$$= 10 \text{ (位)}$$

所以，艺术小组的同学有 10 位。

【点睛】解答此题的关键是，把一个同学一天完成工作量看作 1 份，那么总工作量计算 60 份，据此解题即可。

21. 1170

【格木分析】先依据“工作时间 × 每小时的工资 = 总工资”分别计算出厨师和服务生的工资，再据加法的意义即可得解。

$$\text{【详解】 } 36 \times 10 \times 2 + 30 \times 5 \times 3$$

$$= 720 + 450$$

$$= 1170 \text{ (美元)}$$

所以，每周该向员工支付的工资一共为 1170 美元。

【点睛】先计算出厨师和服务生的工资，是解答本题的关键。

三、解答题

1. 18 天

【格木分析】据题意知：剩下的粉笔 18 个班可用 $60 - 45 = 15$ （天），班级数乘剩下的天数可求出剩下的总量，现在还剩下 $18 - 3 = 15$ （个）班级，用剩下的总量除以剩下的班级数即可求出剩下的粉笔够用多少天。

$$\text{【详解】 } 60 - 45 = 15 \text{ (天)}$$

$$(18 \times 15) \div (18 - 3)$$

$$= 270 \div 15$$

$$= 18 \text{ (天)}$$

答：剩下的粉笔够用 18 天。

【点睛】求出剩下的总量以及剩下的班级数，用剩下的总量除以剩下的班级数，这是解决

此题的关键。

2. 50 天

【格木分析】从“计划每天用 5 吨，40 天用完”中，利用乘法先求出煤的总吨数，把总吨数除以改进锅炉后每天用煤量，可得用煤天数。

$$\text{【详解】} 5 \times 40 \div (5 - 1)$$

$$= 200 \div 4$$

$$= 50 \text{ (天)}$$

答：这批煤可以用 50 天

【点睛】本题考查了归总问题，能正确理解题意并列式是解题的关键。

3. 19 天

【格木分析】根据题意，设每个工人一天修 1 份公路，20 人计划 15 天完成，说明这条公路有 $20 \times 15 = 300$ (份)，动工 3 天后抽出 5 人植树，20 人修 3 天完成 $20 \times 3 = 60$ (份)，那么总工作量还剩 $300 - 60 = 240$ (份)，15 个人修，需要工作 $240 \div 15 = 16$ (天)，所以共计 $3 + 16 = 19$ (天)。

$$\text{【详解】} 3 + (20 \times 15 - 20 \times 3) \div (20 - 5)$$

$$= 3 + (300 - 60) \div 15$$

$$= 3 + 240 \div 15$$

$$= 3 + 16$$

$$= 19 \text{ (天)}$$

答：修完这段公路实际用 19 天。

【点睛】抓住“每个人的工作效率不变”，设每个工人一天修 1 份公路，然后根据工作量、工作效率、工作时间三者之间的关系进行解答。

4. 5 名

【格木分析】因为 5 个人挖 3 米长的沟需要用 3 个小时，那么 5 个人用 1 个小时就可以挖 1 米长的沟，所以 5 个人用 50 个小时也就挖了 50 米长的沟。

$$\text{【详解】} 5 \text{ 个人一小时挖沟的长度: } 3 \div 3 = 1 \text{ (米)}$$

$$50 \text{ 小时挖 } 50 \text{ 米, 每小时挖: } 50 \div 50 = 1 \text{ (米)}$$

答：用 50 个小时挖 50 米的沟需要 5 名工人。

【点睛】本题考查了归一问题，求出 5 个人每小时挖的长度是解题的关键。

5. (1) 840 元; (2) 25 套

【格木分析】(1) 用除法先求出 1 套课桌椅的价钱，再用乘法求出 7 套的价钱即可；

(2) 用 3000 元除以每套课桌椅的单价即可。

【详解】(1) $480 \div 4 = 120$ (元)

$$120 \times 7 = 840$$
 (元)

答：如果买同样的课桌椅 7 套，共需 840 元钱。

$$(2) 3000 \div 120 = 25$$
 (套)

答：如果有 3000 元，可以买进这样的课桌椅 25 套。

【点睛】本题考查了单价、总价和数量三者之间关系的灵活应用。

6. 330 千米

【格木分析】先求火车每小时行多少千米，再求共行了几小时，最后求出共行了多少千米（即甲、乙两地距离）。

【详解】火车每小时行多少千米： $150 \div 2.5 = 60$ (千米)

火车共行了多少小时： $2.5 + 3 = 5.5$ (小时)

甲乙两地相距多少千米： $60 \times 5.5 = 330$ (千米)

综合算式： $150 \div 2.5 \times (2.5 + 3)$

$$= 150 \div 2.5 \times 5.5$$

$$= 60 \times 5.5$$

$$= 330$$
 (千米)

答：甲、乙两地相距 330 千米。

【点睛】归一问题的关键是用除法求出单位数量，但有时也要注意观察分析题目所给的条件，注意数的特点，利用倍比的思路解题更简单。如果直接用归一法求单一量是不能得出整数的，应该根据题目所给数据的特点，采用倍比的方法解题，就像拓展中的题目。

7. 3 元；2 元

【格木分析】分析题意，2 斤苹果 + 4 斤菠萝 = 14 元，3 斤苹果 + 2 斤菠萝 = 13 元，可转化为：6 斤苹果 + 4 斤菠萝 = 26 元，所以 (6 - 2) 斤苹果的售价为 (26 - 14) 元，据此利用除法先求出苹果的单价，从而求出菠萝的单价即可。

【详解】 $(26 - 14) \div (6 - 2)$

$$= 12 \div 4$$

$$= 3$$
 (元)

$$(14 - 3 \times 2) \div 4$$

$$= 8 \div 4$$

$$= 2$$
 (元)

答：1 斤苹果 3 元，1 斤菠萝 2 元。

【点睛】本题考查了归一问题，能根据题意正确列式是解题的关键。

8. 2490 棵

【格木分析】先利用除法求出每只小猴可以分的桃树数量，再乘 60 只小猴求出 60 只小猴需要分的桃树数量，最后加上余下的 90 棵桃树，求出桃树一共有几棵即可。

【详解】 $200 \div 5 = 40$ (棵)

$$40 \times 60 = 2400 \text{ (棵)}$$

$$2400 + 90 = 2490 \text{ (棵)}$$

答：桃树一共有 2490 棵。

【点睛】本题考查了归一问题，解题关键在于求出每只小猴分得的桃树数量。

9. 308 元

【格木分析】根据已知条件分析出第一次和第二次买的足球个数相等，而篮球相差 $7 - 5 = 2$ (个)，总价差 $355 - 281 = 74$ (元)。74 元正好是两个篮球的价钱，从而可以求出一个篮球的价钱，一个足球的价钱也可以随之求出，使问题得解。

【详解】 $(355 - 281) \div (7 - 5)$

$$= 74 \div 2$$

$$= 37 \text{ (元)}$$

$$(281 - 37 \times 5) \div 3$$

$$= (281 - 185) \div 3$$

$$= 96 \div 3$$

$$= 32 \text{ (元)}$$

$$32 \times 5 + 37 \times 4$$

$$= 160 + 148$$

$$= 308 \text{ (元)}$$

答：现在要买 5 个足球、4 个篮球共花 308 元。

【点睛】要求 5 个足球和 4 个篮球共花多少元，关键在于先求出每个足球和每个篮球各多少元。

10. 1728 千克

【格木分析】以 1 头奶牛 1 天产的牛奶为单一量，先求出 1 头奶牛 1 天产牛奶的千克数，再根据乘法的意义求出 8 头奶牛 12 天可产牛奶的千克数。

【详解】 $(630 \div 7 \div 5) \times 8 \times 12$

$$= 18 \times 8 \times 12$$

$$= 1728 \text{ (千克)}$$

答：照这样计算，8 头奶牛 12 天可产牛奶 1728 千克。

【点睛】解答此题的关键是先求得单一量，再由不变的单一量求得总量。

11. 2160 千克

【格木分析】以 1 头奶牛 1 天产的牛奶为单一量，先求出 1 头奶牛 1 天产牛奶的千克数，再根据乘法的意义求出 8 头奶牛 15 天可产牛奶的千克数。

$$\text{【详解】} (630 \div 7 \div 5) \times 8 \times 15$$

$$= 18 \times 8 \times 15$$

$$= 2160 \text{ (千克)}$$

答：照这样计算，8 头奶牛 15 天可产牛奶 2160 千克。

【点睛】解答此题的关键是先求得单一量，再由不变的单一量求得总量。

12. 2 吨；4 吨

【格木分析】分析题意，10 辆小车 + 3 辆卡车 = 32 吨，15 辆小车 + 3 辆卡车 = 42 吨，比较条件，可转化为：15 辆小车 - 10 辆小车 = (42 - 32) 吨，所以 (42 - 32) 吨正好与 (15 - 10) 辆小车的载重量相对应，据此先求出小车的载重量，再求出卡车的载重量即可。

$$\text{【详解】} (42 - 32) \div (15 - 10)$$

$$= 10 \div 5$$

$$= 2 \text{ (吨)}$$

$$(32 - 2 \times 10) \div 3$$

$$= 12 \div 3$$

$$= 4 \text{ (吨)}$$

答：每辆小车每次运货 2 吨，每辆卡车每次运货 4 吨。

【点睛】本题考查了归一问题，明确“每次运货每辆卡车和小车的载货量是一定的”是解题的关键。

13. 2 吨；5 吨

【格木分析】分析题意，30 辆小车 + 3 辆卡车 = 75 吨，45 辆小车 + 6 辆卡车 = 120 吨，比较条件，可转化为：60 辆小车 + 6 辆卡车 = 150 吨，45 辆小车 + 6 辆卡车 = 120 吨，从对应量的变化，可以看出 (150 - 120) 吨正好与 (60 - 45) 辆小车的载重量相对应，据此先求出小车的载重量，再求出卡车的载重量即可。

$$\text{【详解】} 75 \times 2 = 150 \text{ (吨)}$$

$$(150 - 120) \div (60 - 45)$$

$$= 30 \div 15$$

$$= 2 \text{ (吨)}$$

$$(75 - 30 \times 2) \div 3$$

$$= 15 \div 3$$

$$= 5 \text{ (吨)}$$

答：每辆小车每次可运货 2 吨，每辆卡车每次可运货 5 吨。

【点睛】本题考查了归一问题，明确“每次运货每辆卡车和小车的载货量是一定的”是解题的关键。

14. 4 个

【格木分析】要求增加多少只小猴子，必须先求出需要多少只小猴子去完成孙悟空布置的任务。根据要求，3 小时摘桃子 1200 个，可以先求出 1 小时共摘桃的个数，即： $1200 \div 3 = 400$ (个)。再根据每只小猴每小时摘的个数，即： $640 \div 16 \div 2 = 20$ (个)，就可以求出所需要的小猴数量，即： $400 \div 20 = 20$ (只)，最后求出增加的小猴只数： $20 - 16 = 4$ (只)。

$$\text{【详解】} 1200 \div 3 = 400 \text{ (个)}$$

$$640 \div 16 \div 2 = 20 \text{ (个)}$$

$$400 \div 20 = 20 \text{ (个)}$$

$$20 - 16 = 4 \text{ (只)}$$

答：那么需要增加 4 只小猴子一起来摘桃子。

【点睛】本题考查归一问题，明确每只小猴每小时是解题的关键。

15. 4 千克

【格木分析】根据倒进 2 杯水，连罐共重 6 千克；如果倒进 5 杯水，连罐共重 9 千克，可知重量由 6 千克增加到 9 千克是因为多倒进了 $(5-2)$ 杯水，因此可先求出 1 杯水的重量，最后再减去水的重量，即空罐的重量。

【详解】1 杯水的重量：

$$(9-6) \div (5-2)$$

$$= 3 \div 3$$

$$= 1 \text{ (千克)}$$

空罐的重量：

$$6 - 2 \times 1$$

$$= 6 - 2$$

$$= 4 \text{ (千克)}$$

答：空罐重 4 千克。

【点睛】本题考查了归一问题，解题关键是先求出 1 杯水的重量。

16. 5 趟

【详解】1 辆卡车 1 趟运沙土： $336 \div 4 \div 7 = 12$ (吨)，现在有 $4 + 3 = 7$ (辆) 卡车，需

要 $420 \div (7 \times 12)$

$$= 420 \div 84$$

= 5 (趟) 就可以运完。

17. 7 辆

【详解】(方法一) 要想求增加同样卡车多少辆, 先要求出一共需要卡车多少辆; 要求 5 趟运完 560 吨沙土, 每趟需多少辆卡车, 应该知道一辆卡车一次能运多少吨沙土。一辆卡车一次能运沙土: $336 \div 6 \div 7 = 56 \div 7 = 8$ (吨); 560 吨沙土, 5 趟运完, 每趟必须运走: $560 \div 5 = 112$ (吨); 需要增加同样的卡车: $112 \div 8 - 7 = 7$ (辆)。

(方法二) 在求一辆卡车一次能运沙土的吨数时, 可以列出两种不同情况的算式: ① $336 \div 6 \div 7$, ② $336 \div 7 \div 6$ 。算式①先除以 6, 先求出 7 辆卡车 1 次运的吨数, 再除以 7 求出每辆卡车的载重量; 算式②, 先除以 7, 求出一辆卡车 6 次运的吨数, 再除以 6, 求出每辆卡车的载重量。在求 560 吨沙土 5 次运完需要多少辆卡车时, 有以下几种不同的计算方法:

$$(1) 560 \div 5 \div 8 = 112 \div 8 = 14 \text{ (辆)} \quad (\text{其中 } 112 \text{ 是所需的卡车一趟运走的吨数})$$

$$(2) 560 \div 8 \div 5 = 70 \div 5 = 14 \text{ (辆)} \quad (\text{其中 } 70 \text{ 是运走 } 560 \text{ 吨沙土需要的车次})$$

$$(3) 560 \div (8 \times 5) = 560 \div 40 = 14 \text{ (辆)} \quad (\text{其中 } 40 \text{ 是一辆卡车 5 次运走的吨数})$$

18. (1) 1680 个

(2) 30 个

【格木分析】此题要求的两个问题都需知 1 台 1 小时生产的零件数, 因条件中有小时和台数两个量, 需用“两次归一”, 即先求出 4 台 1 小时生产多少, 再求 1 台 1 小时生产多少。

$$600 \div 5 \div 4 \times (4+3) \times 8$$

$$= 30 \times 7 \times 8$$

$$= 1680 \text{ (个)}$$

$$6300 \div [600 \div 5 \div 4 \times (4+3)]$$

$$= 6300 \div (30 \times 7)$$

$$= 30 \text{ (小时)}$$

答: (1) 8 小时可以生产 1680 个零件。

(2) 如果要生产 6300 个零件 30 小时可以完成。

【点睛】本题的关键是求出 4 台 1 小时生产多少。

19. 7 小时

【格木分析】通过 3 小时磨 60 千克, 可以求出 1 小时磨粉数量; 计算出剩下的量除以 1 小时磨粉的数量, 即可得解。

$$【\text{详解}] (200-60) \div (60 \div 3)$$

$$= 140 \div 20$$

$$= 7 \text{ (小时)}$$

答：照这样计算，磨完剩下的面粉还要 7 小时。

【点睛】解决正归一的问题首先要求出单位数量，解决反归一的问题同样也是要先求出单位数量。

20. 50 分钟

【格木分析】把一根木头锯成 5 段，实际上只需要锯 4 下，据此利用除法求出锯 1 下需要的时间，再利用乘法求出再锯 5 下需要的时间即可。

【详解】 $40 \div 4 = 10$ (分钟)

$$10 \times 5 = 50 \text{ (分钟)}$$

答：还需要 50 分钟的时间。

【点睛】本题考查了归一问题，解题关键在于求出锯 1 刀需要用的时间。

21. 60 分米

【格木分析】归一思想。为了求出蜗牛 30 分钟爬多少分米，必须先求出 1 分钟爬多少分米（单一数），“照这样速度”说明小蜗牛每分钟爬行的速度是相等的，然后以这个数目为依据按要求算出结果。小蜗牛每分钟爬行 $12 \div 6 = 2$ (分米)，30 分钟爬 $2 \times 30 = 60$ (分米)。

【详解】 $12 \div 6 = 2$ (分米)

$$2 \times 30 = 60 \text{ (分米)}$$

答：照这样的速度，30 分钟爬行 60 分米。

【点睛】本题属于正归一，有两种解题思路。方法二：倍比思想。仔细观察题目中所给的条件，已知 30 分钟正好是 6 分钟的 5 倍，爬行的距离也应是 12 的 5 倍，即 $12 \times 5 = 60$ (分米)。

22. 9 天

【格木分析】因为工作的效率是一定的，所以可以求出种 400 棵树需要的天数是种 200 棵树天数的： $400 \div 200 = 2$ 倍，所以种 400 棵树需要的天数为： $3 \times 2 = 6$ (天)，也就是完成任务共需 $3 + 6 = 9$ (天)。

【详解】 $400 \div 200 = 2$

$$3 \times 2 = 6 \text{ (天)}$$

$$3 + 6 = 9 \text{ (天)}$$

答：完成任务共需 9 天。

【点睛】此题主要考查倍比思想。求一个数是另一个数的几倍，用除法计算。

23. 120 吨

【格木分析】利用除法先求出 1 台机器 1 分钟造纸的重量，再乘 60 分钟，求出 1 台机器 1

小时造纸的重量即可。

【详解】 $80 \div 2 \div 20 = 2$ (吨)

$$1 \text{ 小时} = 60 \text{ 分钟}$$

$$2 \times 60 = 120 \text{ (吨)}$$

答：1台机器1小时造纸120吨。

【点睛】本题考查了归一问题，解题关键是求出1台机器1分钟造纸的重量。

24. 2000米

【格木分析】根据题意，用 $600 \div 3$ 求出小红骑车的速度，然后再乘10即可解答。

【详解】 $600 \div 3 \times 10$

$$= 200 \times 10$$

$$= 2000 \text{ (米)}$$

答：小红家到学校有2000米。

【点睛】此题主要考查学生对路程问题的理解与应用，关键是掌握路程=速度×时间的公式。

25. 14小时

【格木分析】先用 $108 \div 4$ 求出每小时航行多少千米，再用270除以轮船的速度，即可解答。

【详解】每小时航行多少千米： $108 \div 4 = 27$ (千米)

$$270 \text{ 千米需航行多少小时：} 270 \div 27 = 10 \text{ (小时)}$$

$$\text{共需多少小时：} 10 + 4 = 14 \text{ (小时)}$$

答：共需14小时。

【点睛】此题主要考查学生对归一归总问题的理解与解答。

26. 35千米

【格木分析】根据题意，用 $15 \div 3$ 求出速度，然后再乘7即可解答。

【详解】 $15 \div 3 \times 7$

$$= 5 \times 7$$

$$= 35 \text{ (千米)}$$

答：7小时行35千米。

【点睛】此题主要考查学生对路程问题的理解与应用，关键是掌握路程=速度×时间的公式。

27. 405只；395只

【格木分析】先利用除法求出两个班一起每天叠的千纸鹤数量，再用相同时间内两个班一

共做的数量除以每天叠的数量求出天数，最后利用除法分别求出两个班每天叠的数量即可。

【详解】 $2400 \div 3 = 800$ (只)

$$(2430 + 2370) \div 800$$

$$= 4800 \div 800$$

$$= 6$$
 (天)

$$2430 \div 6 = 405$$
 (只)

$$2370 \div 6 = 395$$
 (只)

答：三（一）班每天叠 405 只，三（二）班每天叠 395 只。

【点睛】本题考查了归一问题，明确“两个班一起每天叠的千纸鹤数量是一定的”是解题的关键。

28. 90 道

【详解】1 分钟=60 秒

李明做一道题用时 $60 \div 3 = 20$ (秒)

做 5 道题用 $5 \times 20 = 100$ 秒，而张强仅用时 $100 - 10 = 90$ (秒)

张强做一道题用时 $90 \div 5 = 18$ (秒)

张强做 100 道题用 $18 \times 100 = 1800$ (秒)

此时李明做了 $1800 \div 20 = 90$ (道)

答：张强做完 100 道题时，李明做完了 90 道题。

29. 8 元

【详解】 $112 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$,

$2 \times 2 \times 2 = 8$, 与 7 就差 1, 所以原来每米 8 元, 现在每米 7 元。

检验一下，原来每米 8 元，可买 $112 \div 8 = 14$ 米，现在每米 7 元，可买 $112 \div 7 = 16$ 米，可比原来多买 $16 - 14 = 2$ 米，符合已知条件。

答：原来每米 8 元。

30. 3 倍

【详解】步行每千米 $60 \div 5 = 12$ 分钟

骑车 $12 - 8 = 4$ 分钟

$$(1 \div 4) \div (1 \div 12) = 3$$

答：骑自行车的速度是步行的 3 倍。

31. 12 米

【详解】甲到终点的时候，乙跑了 $60 - 10 = 50$ 米，丙跑了 $60 - 20 = 40$ 米；

乙丙相比较，乙跑 50 米，比丙多跑 $50 - 40 = 10$ 米；

乙到终点还要跑 10 米, 乙跑 10 米, 比丙多跑 $10 \div (50 \div 10) = 2$ 米

乙到终点的时候, 比丙领先: $10+2=12$ 米

32. 橘子: 20 元 苹果: 25 元 梨: 30 元

【详解】 $55+50+45=150$ (元)

三种水果各一箱= $150 \div 2=75$ (元)

橘子: $75-55=20$ (元)

苹果: $75-50=25$ (元)

梨: $75-45=30$ (元)

答: 橘子每箱 20 元, 苹果每箱 25 元, 梨每箱 30 元.

33. 24 人

【详解】有 16 人不是五年级的, 则六年级和其它年级的共有 16 人;

12 人不是六年级的, 则五年级和其它年级的共有 12 人;

即六年级比五年级多 4 人.

六年级: $(20+4) \div 2=12$ (人)

五年级: $(20-4) \div 2=8$ (人)

共有人数: $16+8=24$ (人)

34. 甲还需再付给乙 1.2 元

【详解】三人同样多的钱买了球之后, 球重新分配, 丙拿出 6 个球, 乙拿出 1 个球, 都给了甲, 如此, 甲手中多了 7 个球, 乙少了 1 个, 丙少了 6 个, 即题目中“甲比乙多拿 8 个, 乙比丙多拿 5 个”.

如此, 丙给了甲 6 个球, 甲给了丙 7.2 元, 则每球价格为 1.2 元, 由于乙也拿了一个球给甲, 则甲还需再付给乙 1.2 元.

35. 高年级 14 幅 低年级 12 幅

【详解】有 31 幅不是低年级的, 即中年级和高年级一共是 31 幅, 又中年级与低年级一共有 29 幅, 这说明高年级比低年级多 2 幅 ($31-29$). 有 26 幅不是中年级的, 即低年级和高年级一共是 26 幅, 又高年级比低年级多 2 幅. 所以高年级: $(26+2) \div 2=14$ (幅), 低年级: $(26-2) \div 2=12$ (幅).

36. 0.6 元

【详解】 $7.5 \times 2 \div 3=15 \div 3=5$ (千克), $1.5 \times 2 \div 5=3 \div 5=0.6$ (元).

答: 每千克西瓜 0.6 元.

37. $\frac{4}{15}$

【格木分析】可以假设这个分数是 $\frac{a}{b}$, 则有 $\frac{a+1}{b} = \frac{1}{3}$, 即 $b = 3a + 3$; $\frac{a-1}{b} = \frac{1}{5}$, 即 $b = 5a - 5$;

因此 $3a + 3 = 5a - 5$, 解方程, 即可得解.

灵活应用分数的基本的性质, 分子、分母同时乘或除以一个非 0 的数, 值不变来解决实际问题.

38. 答: 七层、八层、九层、十层, 无人上或下。

【格木解析】根据放球的规则, 应放小球:

$1+2+3+\cdots+8+9+10=55$ (个),

但实际上只放了 25 个小球,

一共少放了: $55 - 25=30$ (个) 球,

少放 30 个球的原因是有 4 层楼无人上或下,

所以, 想到可以把 30 分解为 1~10 之间四个不同数的和:

$30=3+8+9+10=4+7+9+10=5+6+9+10=5+7+8+10=6+7+8+9$,

根据相应的结果, 可以知道分别是哪四层楼无人上或下,

- (1) 四层、九层、十层、十一层,
- (2) 五层、八层、十层、十一层,
- (3) 六层、七层、十层, 十一层,
- (4) 六层、八层、九层, 十一层,
- (5) 七层、八层、九层、十层,

所以, 一共有五种可能的情况,

但考虑到具体情况, 如果第十一层楼没有人上下, 那么电梯是不可能上到 11 楼的,

所以 11 楼一定有人上下, 那么前面四种可能都被排除!

所以只有第 (5) 种情况符合实际,

答: 七层、八层、九层、十层, 无人上或下.

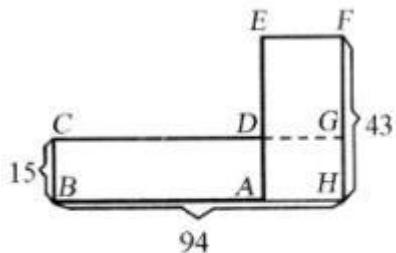
39. 35 秒

【详解】小志和小刚顺向攀登运行的自动扶梯时分别都攀登了 $28 \times 2=56$ 级和 $20 \times 3=60$ 级, 小刚比小志多走了 $60-56=4$ 级, 这 4 级台阶实际上是小志多走的 8 秒钟内, 自动扶梯“缩”进去的.

小志多走的 8 秒钟内, 电梯多运行了 4 个台阶, 因此自动扶梯的运行速度为每秒半个台阶. 那么在小刚登梯的 20 秒内, 自动扶梯也缩了 10 级, 自动扶梯所能见到的部分是 $60+10=70$ 级, 所以, 小志攀登静止的自动扶梯分别需要用时 $70 \div 2=35$ 秒.

40. 192 把

【格木分析】根据题意画长方形图如答图 1.



答图 1

AB 表示甲车间工人数, AH 表示乙车间工人数, 长方形 ABCD 的面积表示甲车间每天生产竹椅的把数, 长方形 AEFH 的面积表示乙车间每天生产竹椅的把数. 长方形 ABCD 与 AEFH 的面积和表示 1998 把竹椅. 由于长方形 BCGH 的面积是 15×94 , 所以长方形 DEFG 的面积是 $1998 - 15 \times 94$, 而长方形 DEFG 的一边 DE 的长为 $(43 - 15)$, 另一边 EF 的长为 $(1998 - 15 \times 94) \div (43 - 15)$, 它就是乙车间的工人数. 甲车间的工人数 = 94 - 乙车间的工人数. 这样长方形 ABCD 和 AEFH 面积都可以求得, 它们的差就是甲车间每天竹椅的产量比乙车间多的数.

【详解】解: 乙车间工人数: $(1998 - 15 \times 94) \div (43 - 15) = (1998 - 1410) \div 28 = 21$ (人),
甲车间工人数: $94 - 21 = 73$ (人), $15 \times 73 - 43 \times 21 = 1095 - 903 = 192$ (把)

答: 甲车间每天竹椅的产量比乙车间多 192 把.

41. 鱼头 8 千克, 躯干 12 千克

【格木分析】根据题目所给条件, 根据“鱼头的重量是鱼尾加躯干之和的一半”, 说明了鱼头占鱼总重的三分之一. 根据“躯干的重量等于鱼头加鱼尾”, 说明了躯干占鱼总重的一半. 所以鱼尾占鱼总重的六分之一. 所以可以得出: 鱼头是鱼尾的 2 倍, 即 8 千克; 躯干是鱼尾的 3 倍, 即 12 千克.

【详解】: 鱼头是鱼尾的 2 倍, 即 $4 \times 2 = 8$ (千克);

躯干是鱼尾的 3 倍, 即 $4 \times 3 = 12$ (千克).

答: 鱼头 8 千克, 躯干 12 千克.

42. 甲收回 60 万元 乙收回 30 万元

【详解】略

43. 85 人

【详解】甲、乙、丙、丁四个班的总人数: $83 + 88 = 171$ (人)

用总人数减去乙班和丙班的人数, 就可以得出甲班和丁班的人数: $171 - 86 = 85$ (人)

44. 6 人

【格木分析】假设每人每天干的工作量是 1 份，则这个工程的总工作量的一半有 $18 \times 12 = 216$ 份，要保证提前 9 天完成，即 $30 - 9 = 21$ 天完成，求出完成剩下的工作量需要的人数，再减去 18 人，就是增加的人数，据此解答即可。

【详解】 $18 \times 12 \div (30 - 12 - 9)$

$$= 216 \div 9$$

$$= 24 \text{ (人)}$$

$$24 - 18 = 6 \text{ (人)}$$

答：还需要增加 6 人。

【点睛】本题考查的是基本的工程问题，比较基础，细心解答即可。

45. 6

【详解】移多补少，第一块地每亩多： $705 - 675 = 30$ (千克)

第一块地总共多： $30 \times 5 = 150$ (千克)

第二块地每亩少： $675 - 650 = 25$ (千克)

亩数： $150 \div 25 = 6$ (亩)

答：第二块地有 6 亩。

46. 第 5 天

【格木分析】白天能爬 3.5 米，但是每到晚上又下滑 1.5 米，说明这只蜗牛一天能爬 $3.5 - 1.5 = 2$ (米)，但是最后一天爬到树顶以后就不会下滑，所用 11.5 米减去最后一天的 3.5 米，除以一天爬的高度 2 米，然后用的天数加上最后一天即可。

【详解】 $(11.5 - 3.5) \div (3.5 - 1.5) + 1 = 5$ (天)

答：这只蜗牛第 5 天才能爬到树顶。

【点睛】本题考查有余数的小数除法中，具体应用。

47. 44 人

【详解】略

48. 陶红说：“真倒霉，我生于 1992 年 2 月 29 日下午 14 时，一般每四年只过一次生日”。王伟说：“比赛时常看见 3:0 这样的比分，所以说比的后项可以是 0”。张燕说：“前天，我和四个同学轮换背两个脚扭伤的同学到 200 米远的医院就诊，平均每人背 40 米路程”。李玉说：“某种奖券的中奖率是 10%，每买 100 张奖券，肯定中奖 10 张”。吴小花说：“上次爸爸想做一个直径为 0.3 米，长为 3 米的圆柱形通风管，我建议，如果不计接头耗材，至少要买一块面积为 2.8 平方米的长方形铁皮”

【详解】试题分析：(1) 先分析陶红说的话，1996 年是闰年，因为一般 4 年一闰，每四年只过一次生日是正确的，但是用普通计时法应该是下午 2 时，换成 24 时计时法是 14 时，应删

去“下午”；

(2) 再看王伟的说法，要知道比分和比是两个不同的概念，错误的原因在于王伟没有正确区分这两个概念，不能说“比的后项可以是0”；

(3) 再来看张燕的说法，我和四个同学轮换背两个脚扭伤的同学到200米远的医院就诊，背人走的路程是 $2 \times 200 = 400$ 米，平均每人背 $400 \div 5 = 80$ 米路程；

(4) 李玉的说法错在“肯定中奖10张”上，错误的原因在于这是一个可能事件，有可能100张都中奖，也可能1张也没有中奖；

(5) 最后我们来分析吴小花的说法，此题应求出侧面的长和宽，长不少于3米，宽不少于0.94米，不能只看面积。因此不正确。

49. 2元

【详解】第一次他的成本是8元，销售9元，第一次生意赚了1元；

第二次他的成本是10元，销售11元，第二次生意赚了1元；

总盈利（毛利）2元，总成本18元，总销售额20元。

50. 鱼重32千克

【详解】可知：两个鱼头=两个鱼尾+鱼身，又知道：鱼身=鱼头+鱼尾；

所以，两个鱼头=两个鱼尾+鱼头+鱼尾；所以，两个鱼头=3个鱼尾+鱼头；

所以，鱼头=3个鱼尾；

所以，鱼头重： $3 \times 4 = 12$ （千克）；

鱼身重： $12 + 4 = 16$ （千克）；

所以鱼共重 $12 + 16 + 4 = 32$ （千克）。

51. 25人。

【详解】试题分析：如果把书全部分给第一组，那么有人有4本的，有人有5本的。说明第一组人数少于 $48 \div 4 = 12$ 人，多于 $48 \div 5 = 9 \cdots 3$ ，即9人；如果把书全分给第二组，那么有人有3本的，有人有4本的。说明第二组人数少于 $48 \div 3 = 16$ 人，多于 $48 \div 4 = 12$ 人；因为已知第二组比第一组多5人，所以，第一组只能是10人，第二组15人。由此解决问题。

解：由于 $48 \div 4 = 12$ 人， $48 \div 5 = 9 \cdots 3$ 本，

所以，第一组少于12人，多于9人；

由于 $48 \div 3 = 16$ ， $48 \div 4 = 12$ ，

所以第二组多于12人，少于16人；

又已知第二组比第一组多5人，

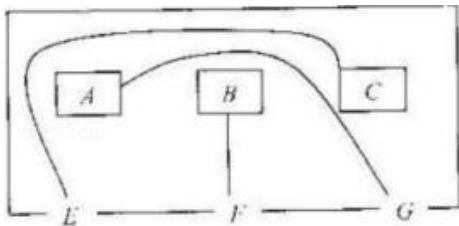
所以，第一组只能是10人，第二组只能是 $10 + 5 = 15$ 人。

两组一共有： $10 + 15 = 25$ （人）

答：两组一共有 25 人。

点评：根据题意得出两组人数的取值范围是完成本题的关键。

52. 符合要求的图形如下：



点评：解答本题的关键是考虑这三条路不能交叉，那么这三条路只能拐弯了。

53. 3.25 小时

【格木分析】根据题意，设把 1 个工人工作 1 小时，作为 1 个工时，则原计划加工这批零件需要的“工时”： $8 \times 18 \times 7.5 = 1080$ （工时），所以增加 6 人后每天工作的时间为： $1080 \div (18 + 6) \div 4 = 11.25$ （小时）；所以每天加班工作的时间为： $11.25 - 8 = 3.25$ （小时），每天要加班工作 3.25 小时。

$$\text{【详解】} (8 \times 18 \times 7.5) \div (18 + 6) \div 4$$

$$= 1080 \div 24 \div 4$$

$$= 11.25 \text{ (小时)}$$

$$11.25 - 8 = 3.25 \text{ (小时)}$$

答：每天加班工作 3.25 小时。

【点睛】我们把 1 个工人工作 1 小时，作为 1 个工时。根据已知条件，加工这批零件，原计划需要多少“工时”呢？求出“工时”数，使我们知道工作总量。有了工作总量，以它为标准，不管人数增加或减少，工期延长或缩短，仍然按照原来的工作效率，只要能够达到加工零件所需“工时”总数，再求出要加班的工时数，问题就解决了。

54. 5 小时

【格木分析】根据题意，1 台数控机床 1 小时加工 $(960 \div 3 \div 4)$ 个同样的零件，即 80 个；1 台加工 400 个零件需要： $400 \div 80 = 5$ （小时）。

$$\text{【详解】} 960 \div 3 \div 4 = 80 \text{ (个)}$$

$$400 \div 80 = 5 \text{ (小时)}$$

答：1 台数控机床加工 400 个相同的零件需要 5 小时。

【点睛】本题主要考查了归一问题，解答此类题的关键是，找出“单一量”，然后以这个“单一量”为标准，根据其它条件求出结果。

55. 24 小时

【格木分析】要求两管齐开需要多少小时把满池水排光，关键在于先求出进水速度和排水速度。当两管齐开时要把满池水排空，排水速度必须大于进水速度，即单位时间内排出的水等于进水与排水速度差。解决了这个问题，又知道总水量，就可以求出排空满池水所需时间。
 ①进水速度： $480 \div 8 = 60$ (吨/小时)，
 ②排水速度： $480 \div 6 = 80$ (吨/小时)，
 ③排空全池水所需的时间： $480 \div (80 - 60) = 24$ (小时)

$$\text{【详解】} 480 \div (480 \div 6 - 480 \div 8)$$

$$= 480 \div (80 - 60)$$

$$= 480 \div 20$$

$$= 24 \text{ (小时)}$$

答：两管齐开需 24 小时把满池水排空。

【点睛】解答此题的关键是，找出进水速度与排水速度的差，此题也可以把水槽可容水量看作单位“1”，列式为： $1 - (\frac{1}{6} - \frac{1}{8})$ 。

56. 6 次

$$\text{【详解】} \text{一辆大卡车一次: } 80 \div 4 \div 5 = 4 \text{ (吨)}$$

$$\text{一辆小卡车一次: } 36 \div 3 \div 8 = 1.5 \text{ (吨)}$$

$$\text{一辆大卡车和三辆小卡车一次: } 4 + 1.5 \times 3 = 8.5 \text{ (吨)}$$

$$51 \text{ 吨需要的次数: } 51 \div 8.5 = 6 \text{ (次)}$$

答：需运 6 次才能运完。

57. 24 天

【格木分析】本题有多种解法：

(1) 要求出“修完这条公路还要多少天”，需要两个条件：①还剩下多少没有修；②每天修多少米。这两个条件虽然题中没有给出，但我们可以过已知条件求出。

(2) 可以先求出修完这条公路一共需要多少天。然后用总天数减去已经修的天数就可得到本题的结果。要求一共需要多少天，需用总长度除以每天修多少米，即“单一量”。总长度是已知的，每天修多少米可用 $540 \div 6 = 90$ (米) 求得。

(3) 可先求总长度是已修完的多少倍， $2700 \div 540 = 5$ ，那么，修完这条公路的总天数就应该是 6 天的多少倍。因此，用 $6 \times 5 = 30$ (天) 就得到总天数，再用总天数减去已修的天数就得到本题的结果。

(4) 可先求出没修的路程是已修路程的多少倍， $(2700 - 540) \div 540 = 4$ ，那么，修完这条公路还要多少天就是已修天数的多少倍， $6 \times 4 = 24$ (天)。

$$\text{【详解】} \text{解: 解法一: } 2.7 \text{ 千米} = 2700 \text{ 米} \quad (2700 - 540) \div (540 \div 6) = 24 \text{ (天)}$$

☆解法二: $2700 \div (540 \div 6) - 6 = 24$ (天)

☆解法三: $6 \times (2700 \div 540) - 6 = 24$ (天)

☆解法四: $6 \times [(2700 - 540) \div 540] = 24$ (天)

答: 修完这条公路还要 24 天.

【点睛】正确地求出单一量的数值是解答归一应用题的关键, 注意抓准题中数量的对应关系是解答归一应用题的基础. 有些归一应用题还可以采取同类数量之间进行倍数比较来解答, 这种方法叫“倍比法”.

58. 2 次

【格木分析】先求出每个学生每次运的砖数, 再求出现在的学生一次运的砖数, 最后求出还要运的次数。

【详解】先求出每个学生每次运的砖数: $2000 \times \frac{1}{2} \div 4 \div 50 = 5$ (块)。

再求出现在的学生一次运的砖数:

$$(50 + 50) \times 5$$

$$= 100 \times 5$$

$$= 500 \text{ (块)}.$$

最后求出还要运的次数: $2000 \times \frac{1}{2} \div 500 = 2$ (次)。

答: 还要 2 次运完。

【点睛】解答题时要弄清题目中的条件与所求问题之间的关系, 选用正确的数量关系解决问题。

59. 54 年

【格木分析】根据题意可知: 妹妹 1 年所学懂的知识由学一知一的人来学, 需要 3 年; 姐姐学三忘二, 也就是学三知一, 则学一知一的人 1 年所学懂的知识, 姐姐需要 3 年; 由此可以知道妹妹学 1 年所学懂的知识, 姐姐需要 $3 \times 3 = 9$ (年); 据此分析解答即可。

【详解】 $6 \times 3 \times 3 = 54$ (年)

答: 妹妹在 6 年间所学懂的知识, 姐姐需要 54 年才能学懂。

【点睛】本题的关键是根据题意分析出, 妹妹学 1 年所懂的知识, 姐姐需要的时间, 据此分析解答即可。

60. 160 吨

【格木分析】“增加 4 辆同样的汽车”, 每天一共运水泥多少吨, 应是增加的汽车运输量与增加前的运输量的和, 即 10 辆汽车的运输量。先求出一辆汽车每天的运输量, 再计算 10 辆汽

车的运输量。

【详解】 $(96 \div 6) \times (6+4)$

$= 16 \times 10$

$= 160$ (吨)

答：每天可运水泥 160 吨。

【点睛】能求出一辆汽车每天的运输量，理解“增加 4 辆同样的汽车，每天一共运水泥多少吨”的意思，这是解决此题的关键。

61. 480 个

【格木分析】先求出每个工人每小时制作机器零件的个数，人数少一半变成了 $8 \div 2$ 人，时间增加 5 小时变成了 $(3+5)$ 小时，每个工人每小时制作机器零件的个数与 $8 \div 2$ 人、 $(3+5)$ 小时的乘积即为所求。

【详解】此题中人数缩小了为原来的 $\frac{1}{2}$ 指现在的人数是 $8 \div 2 = 4$ (人)；时间增加了 5 小时指现在的时间是 $3+5=8$ (小时)。

$360 \div 8 \div 3 \times (8 \div 2) \times (3+5)$

$= 15 \times 4 \times 8$

$= 480$ (个)

答：可制作机器零件 480 个。

【点睛】工作总量=工作效率×工作时间，求出 1 个工人 1 小时制作零件的个数是解本题的关键。

62. 700 个

【格木分析】先求出每个人每天做的个数，再求出共做的个数，最后求出增加的个数。

【详解】 $900 \div 15 \div 3$

$= 60 \div 3$

$= 20$ (个)

$20 \times 10 \times 8$

$= 200 \times 8$

$= 1600$ (个)

$1600 - 900 = 700$ (个)

答：增加了 700 个零件。

【点睛】解答此题的关键是先求得单一量，再由不变的单一量求得总量。

63. 400 个

【格木分析】要求增加了多少个零件，只需先求出每人每天生产多少个零件，然后求出 15 个人 7 天生产的零件数，最后用它减去 1280 个零件就可得出所要求的问题。

【详解】(1) 每人每天生产的零件数 $1280 \div 20 \div 4 = 16$ (个)

(2) 15 人 7 天生产的零件数 $16 \times 15 \times 7 = 1680$ (个)

(3) 增加的零件数 $1680 - 1280 = 400$ (个)

$$\text{综合算式 } (1280 \div 20 \div 4) \times 15 \times 7 - 1280$$

$$= 16 \times 15 \times 7 - 1280$$

$$= 1680 - 1280$$

$$= 400 \text{ (个)}$$

答：增加了 400 个零件。

【点睛】本题的关键是求出每人每天生产的零件数。

64. 30 套

【格木分析】用 30×12 求出这批桌椅的总套数，再除以实际的天数即可求出实际每天生产多少套，再用实际每天生产的套数减去计划的套数即可。

【详解】 $30 \times 12 = 360$ (套);

$$12 \div 2 = 6 \text{ (天);}$$

$$360 \div 6 = 60 \text{ (套);}$$

$$60 - 30 = 30 \text{ (套);}$$

答：实际每天比计划多生产 30 套。

【点睛】求出这批桌椅的总套数和实际生产的天数是解答本题的关键，进而求出实际每天生产多少套。

65. 25 台

【格木分析】根据拖拉机 5 台 24 天耕地 12000 亩，先求出每台拖拉机每天耕地的数量，再求出每台拖拉机 18 天耕地的数量，用 12000 除以每台拖拉机 18 天耕地的数量得出需要的拖拉机的台数减去原有的台数得出增加的台数。

【详解】1 台拖拉机 1 天耕地： $12000 \div 24 \div 5 = 100$ (公亩)

18 天耕完 54000 公亩土地需要拖拉机： $54000 \div 18 \div 100 = 30$ (台)

$$\text{需要增加 } 30 - 5 = 25 \text{ (台)}$$

答：需要增加同样拖拉机 25 台。

【点睛】解答此题的关键是先求出每台拖拉机每天耕地的数量，进而求出所求的问题。

66. 1 个

【格木分析】首先求出每个工人每小时加工零件的个数，再求出没加工的零件的个数，进

而求出 1 个工人 15 小时加工零件的个数，然后用没加工的零件数量除以 1 个工人 15 小时加工数量就是需要的人数，再减去 3 人即可求出增加的人数。

$$\begin{aligned} \text{【详解】} & (3960 - 1320) \div (1320 \div 10 \div 3 \times 15) - 3 \\ & = 2640 \div (44 \times 15) - 3 \\ & = 2640 \div 660 - 3 \\ & = 4 - 3 \\ & = 1 \text{ (个)} \end{aligned}$$

答：需要增加 1 个工人。

【点睛】此题主要考查工作时间、工作效率、工作总量三者之间的数量关系，解答时要注意从问题出发，找出已知条件与所求问题之间的关系，再根据已知条件回到问题即可解决问题。

67. 4 元 2 角；6 角

【格木分析】由已知条件可知，甲要付出的钱是 4 元 8 角，即 48 角。因为甲没有带钱，而三个人吃的面包一样多，可知乙、丙都应付 48 角。这样三个人应付的总数是 3 个 48 角，正好是 8 个面包的总价。这样就可以求出面包的单价，同时也可求出乙付的 5 个面包与丙付的 3 个面包的钱。最后以每人应付的 48 角为标准，多付的就是应收回的钱。

【详解】面包总价： $48 \times 3 = 144$ (角)

面包单价： $144 \div 8 = 18$ (角)

乙应收回：

$$18 \times 5 - 48$$

$$= 90 - 48$$

$$= 42 \text{ (角)}$$

丙应收回：

$$18 \times 3 - 48$$

$$= 54 - 48$$

$$= 6 \text{ (角)}$$

答：应还给乙 4 元 2 角，应还给丙 6 角。

【点睛】本题考查了归一问题，解题关键是找出每个面包的单价。

练习 B

一、选择题

1. B

【格木分析】此题可设这本书共有 n 页，然后用求和公式解答，还要知道一张纸包含 2 页。

【详解】设这本书有 n 页，则 $1+2+3+\dots+n > 1000$ ，即： $(1+n) \times n \div 2 > 1000$ ；

①当 $n=44$ 时， $(1+n) \times n \div 2 = 990 < 1000$ ，不合题意，舍去。

②当 $n=45$ 时， $(1+n) \times n \div 2 = 1035 > 1000$ ，符合题意。

答：这本书共有 45 页。

2. B

【格木分析】由于捡起这张纸发现第 8 页和第 21 页在同一张纸上，第 8 页前面还有 7 页，根据书的装订方法可知，与之相对应的 21 后面也应有 7 页，则这份杂志共有 $21+7=28$ 页。

【详解】 $21 + (8 - 1) = 21 + 7 = 28$ (页)。

答：这份杂志共有 28 页。

3. B

【格木分析】本题可根据自然数的排列规律及数位知识进行分析。

【详解】在 1~230 中，个位数共有 9 个，需要数码 9 个；

两位数共有 90 个，需要数码 $90 \times 2 = 180$ 个；

三位数共有 131 个，需要数码 $131 \times 3 = 393$ 个；

共需要数码： $9 + 180 + 393 = 582$ (个)。

即编页码时需要的数码总数是 582 个。

4. B

【详解】试题分析：坏表与标准时间的比是 $(60+18):60 = 3:10$ ，从 0:00 到 3:00 坏表经过了 3 小时，可设标准时间经过了 x 小时，根据坏表与标准时间的比，可求出实际的时间，据此解答。

解答：解：设标准时间经过了 x 小时，则有：

$$(60 + 18):60 = 3:x \rightarrow 13:10 = 3:x \rightarrow 13x = 30 \rightarrow x = 2\frac{4}{13}$$

$x = 2\frac{4}{13}$ 时 ≈ 2 小时 18 分，所以这时的时刻是 2:18。

答：实际时刻是 2:18。

故选 B。

点评：本题的重点是根据坏表与标准时间的比一定，列出方程再进行解答。

5. C

【格木分析】可先找出 100 以内即 0~99 中 1 出现的次数，数字 11 相当于出现两次，则除了 100~200 之间的，其他的如 200~300 等出现的次数与 0~99 出现的次数相同，进而最后相加求和即可。

【详解】1 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 21 31 41 51 61 71 81 91 有 20 个，100~199 有 $100+20=120$ 个，剩下的 200~500 有 $3\times 20=60$ 个，所以一共出现 $20+120+60=200$ 次。

6. B

【格木分析】分 3 段找出写了数字“5”的个数，再将个数相加求和即可。

【详解】从 1 到 49 写了 5 个数字“5”，从 60 到 100 写了 4 个数字“5”，从 50 到 59 写了 11 个数字“5”，总计写了数字“5”的个数为： $5+4+11=20$ （个）。

故答案为：B

7. B

【详解】时钟钟面上一圈一共 12 格，分针从 12 走到数字 5，走了 5 格，根据分数的意义，分针走了一圈的 $\frac{5}{12}$ ；据此作答。

二、填空题

1. 16

【详解】略

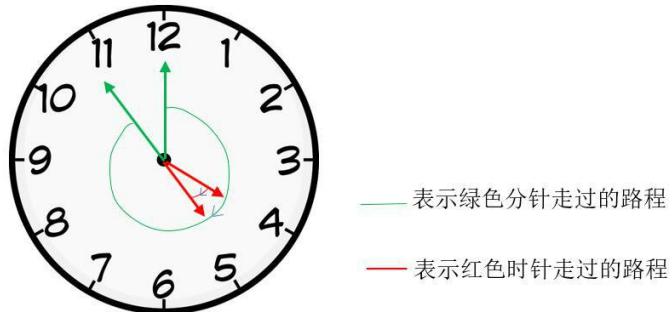
2. $54\frac{6}{11}$

【详解】钟面行程问题中：一圆周 360° ，时针的一大格路程为 $360^\circ \div 12=30^\circ$ ，时针走一大格即 1 小时=60 分钟，那么时针的速度为 $\frac{30^\circ}{60 \text{ 分}}=0.5^\circ/\text{分}$ 。

分钟走一圈路程为 360° ，时间为 1 小时=60 分钟，则分针的速度为 $\frac{360^\circ}{60 \text{ 分}}=6^\circ/\text{分}$ 。

因此，分针与时针的速度差为 $5.5^\circ/\text{分}$ 。

设在 4 点 x 分时，时针与分针在一条直线上且方向相反。4 点整时时针和分针同时出发，相同时间，到“时针与分针在一条直线上且方向相反”，绿色分针、红色时针走过的路程如图所示：



分针比时针走的快，由图可知，从 4 点整开始，到“时针与分针在一条直线上且方向相反”时，分针比时针多走了 $180^\circ + 4 \times 30^\circ = 300^\circ$ ，即路程差为 300° .

根据时间=路程差 \div 速度差，可得 $x=300^\circ \div 5.5^\circ/\text{分} = 54\frac{6}{11}$ (分).

【点睛】此题为钟面行程问题，需求出分针与时针的速度差： $5.5^\circ/\text{分}$ ，再找出路程差，根据时间=路程差 \div 速度差求出答案.

3. $16\frac{4}{11}$ 12 点 $49\frac{1}{11}$ 分

【详解】时钟问题. 分针每分钟走 $360 \div 60 = 6$ 度，时针每分钟走 $30 \div 60 = 0.5$ 度，第一次成 90 度角，即分针比时针多走 90 度， $90 \div (6 - 0.5) = 16\frac{4}{11}$ 分. 时针与分针第二次成 90° ，即分针比时针多走 270 度， $270 \div (6 - 0.5) = 49\frac{1}{11}$ 分，此时为 12 点 $49\frac{1}{11}$ 分.

4. 90 150

【格木分析】画出图形，利用钟表表盘的特征解答。

【详解】3 点整，时针指向 3，分针指向 12，钟表 12 个数字，每相邻两个数字之间的夹角为 30° ，因此 3 点整分针与时针的夹角正好是 $3 \times 30^\circ = 90^\circ$ ；

7 点整，时针指向 7，分针指向 12，因此 7 点整分针与时针的夹角正好是 $5 \times 30^\circ = 150^\circ$ 。

【点睛】画图是解决好本题的关键。

5. 44

【详解】24 小时分针比时针多转 22 圈. 每多转一圈，分针与时针垂直两次， $22 \times 2 = 44$ (次).

6. 30

【详解】3 点 18 分时分针指向 3，时针指向 3 与 4 的正中间. 3、4 与圆心所构成的锐角是 $360 \div 6 = 60$ 度. 所以是 30 度.

7. 4 12.

【详解】试题分析：5 点相当于 12 小时，那么 1 点相当于 2.4 小时， $6.75 \times 2.4 = 16.2$ (小时)，即 16 时 12 分，就是下午 4 点 12 分.

解：6点75分=6.75小时。

$6.75 \times (12 \div 5) = 16.2$ （小时），即下午4点12分。

点评：此题既考查了钟面和时间的知识，还渗透了比例的知识。

$$8. \quad 54\frac{6}{11}; \quad 65\frac{5}{11}.$$

【详解】试题分析：这个问题可以看作是环形跑道问题，把一圈看作是60个单位长度，时针在前，分针在后，时针每分钟走 $\frac{5}{60}$ 个单位长，分针每分钟走一个单位长，两针同向而行，何时分针追上时针。

解：设在10点过x分钟后，两针重合，由题意得：

$$x - \frac{5}{60}x = 50,$$

$$\text{解这个方程得: } x = 54\frac{6}{11};$$

设两针第一次重合后，再过y分钟后，两针重合，由题意得：

$$y - \frac{5}{60}y = 60,$$

$$\text{解这个方程得: } y = 65\frac{5}{11}.$$

$$\text{故答案为 } 54\frac{6}{11}; \quad 65\frac{5}{11}.$$

点评：本题考查钟表分针所转过的角度计算。钟表里的分钟与时针的转动问题本质上与行程问题中的两人追及问题非常相似。行程问题中的距离相当于这里的角度；行程问题中的速度相当于这里时（分）针的转动速度。

9. 277

【格木分析】第1页到第9页，每页用1个数字，共9个；第10页到第99页，每页用2个数字，共180个；第100页到第999页，每页用3个数字，共2700个；而这本书一共用了723个数字，那么总的页码应该是三位数。

$$\text{【详解】} 723 - 9 \times 1 - 90 \times 2 = 723 - 9 - 180 = 534 \text{ (个)}$$

$$534 \div 3 = 178 \text{ (页)}$$

$$100 + 178 - 1 = 277 \text{ (页)}$$

【点睛】本题考查的是页码问题，注意分区间进行考虑。

10. 61

【格木分析】这个数的位数与数码的总共个数有关系，从1到9都是一位数，则共有9个

数码，从 10 到 35 全是两位数，求出一共有多少个数码即可。

【详解】从 1 到 9 有 9 个数码；

$$35 - 10 + 1 = 26 \text{ (个)}$$

$$26 \times 2 = 52 \text{ (个)}$$

$$9 + 52 = 61 \text{ (位)}$$

所以这个大数的位数是 61 位。

【点睛】本题考查的是页码问题，在求数字个数的时候，用最大数减去最小数，还需要加上 1。

11. 36

【格木分析】分成 2 在十位数出现的次数和 2 在个位上出现的次数来考虑，然后相加得到总数。

【详解】十位上是 2 的有 20~29, 120~129, 20 个（含有 22 和 122 十位上的 2）；
个位上是 2 的有 2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92, 102, 112, 122, 132, 142,
152, 16 个（不包含 22 和 122 十位上的 2）；

$$20 + 16 = 36 \text{ (个)}$$

所以共有 36 个数。

【点睛】本题考查的是页码问题，需要注意的数 22、122 里面是含有两个数字 2 的。

12. 282

【格木分析】从简单的开始分析，一位数：1 至 9，共 9 页；两位数：10 至 99，共 90 页；
三位数：100 至 130，共 31 页；再把这些页数分别乘各自位数再相加即可。

【详解】一位数：1 至 9，

$$(9 - 1 + 1) \times 1$$

$$= 9 \times 1$$

$$= 9 \text{ (个)}$$

一位数需要 9 个数字；

两位数：10 至 99，

$$(99 - 10 + 1) \times 2$$

$$= 90 \times 2$$

$$= 180 \text{ (个)}$$

二位数需要 180 个数字；

三位数：100 至 130，

$$(130 - 100 + 1) \times 3$$

$$= 31 \times 3$$

$$= 93 \text{ (个)}$$

三位数需要 93 个数字。

所以需要总共数字: $9 + 180 + 93$

$$= 189 + 93$$

$$= 282 \text{ (个)}$$

【点睛】此题属于页码问题，解题时应分段解答，能正确找到信息之间的关系，合理运用是解题的关键。

13. 44

【格木分析】本题中我们可设共有 n 页，被加了两次的页码为 x ，由题意可知页码总和一定小于 1997， x 小于等于总页数 n 。那么用特殊值法求得 $n=62$ 。则被加了两次的页码 x 就等于错误结果 1997 减掉正确结果 $n(n+1) \div 2$ 的差。

【详解】解：设共 n 页，被加了两次的页码是 x

$$\text{则 } n(n+1) \div 2 < 1997,$$

$$\text{且 } x \leq n$$

$$\text{用特殊值法求得 } n=62,$$

则被加了两次的页码是：

$$1997 - 62 \times (62+1) \div 2 = x$$

$$x = 1997 - 63 \times 31$$

$$x = 1997 - 1953$$

$$x = 44;$$

14. 14

【格木分析】一张纸正面是 1 页，反面就是 2 页，因此根据已知缺少的页数即可判断这张纸的里面缺少的页数，这样就能判断出缺少的总页数。

【详解】2 前面缺少 1 页，7、8 页是一张，9 后面缺少 10 页，12 前面缺少 11 页，15 后面缺少 16 页，20 前面缺少 19 页，30 前面缺少 29 页，共缺少 14 页。

15. 144

【格木分析】本题可按页码的位数进行分析，1-9 页 9 个，10 到 99 页，有 $90 \times 2 = 180$ (个)，剩下的 $216 - 9 - 180$ 个数字组成三位数页码。故能求出三位数页码有: $(216-9-180) \div 3 = 9$ (页)。再计算一下插图的页数。相加即为本书的总页数。

【详解】1-9 页 9 个，

10 到 99 页，有 $90 \times 2 = 180$ (个)，

三位数页码有: $(216-9-180) \div 3=9$ (页)

插图页: $(9+90+9) \div 3=36$ (页)

$9+90+9=108$ (页)

$36+108=144$ (页)

答: 这本书共有 144 页.

故答案为 144.

16. 81

【格木分析】此题可采用列举法解答: 1 - 10 出现 1 次; 11 - 20 出现 1 次; 21 - 30 出现 1 次; 31 - 40 出现 2 次; 41 - 50 出现 10 次; 51 - 100 出现 5 次;

所以 1 - 399 中, 每 100 个数中, 4 会出现 20 次, 那么 399 个会出现 $4 \times 20=80$ 次, 400 里面也有 1 次, 所以出现 81 次.

【详解】①1 - 10 出现 1 次;

②11 - 20 出现 1 次;

③21 - 30 出现 1 次;

④31 - 40 出现 2 次;

⑤41 - 50 出现 10 次;

⑥51 - 100 出现 5 次;

所以 1 - 399 中, 每 100 个数中, 4 会出现: $4 \times 20=80$ (次);

400 里面也有 1 次, 所以出现 $80+1=81$ (次).

17. 2233

【格木分析】(1) 根据题干, 书的页数是从 1 开始依次往下排列的, 此题可以先求出一位数, 两位数, 三位数各用去了多少个数字, 如: 一位数用去了 9 个, 两位数用去了 $90 \times 2=180$ 个…由此类推;

(2) 从 7825 个数字里去掉一位数、两位数、三位数用掉的数字, 剩下的就是四位数需要的数字, 显然四位数一个页数就需要 4 个数字组成, 由此即可解决问题.

【详解】一位数共用数字: 9 个

二位数共用数字: $90 \times 2=180$ (个)

三位数共用数字: $900 \times 3=2700$ (个)

还剩下: $7825 - 9 - 180 - 2700=4936$ (个),

$4936 \div 4=1234$ (个), 即: 剩下的数字可以组成 1234 个四位数,

那么从 1000 开始, 第 1234 个四位数是: $1000+1234-1=2233$

所以这本书的最后一页是 2233 页.

答：这本书共有 2233 页.

18. 114

【格木分析】可按页码的位数进行分析，1~9 页 9 个，10 到 99 页，有 $90 \times 2 = 180$ (个)，剩下的 $234 - 9 - 180$ 个数字组成三位数页码。 $234 - 9 - 180 = 45$ 个， $45 \div 3 = 15$ ，所以共有 15 个三位数页码。则这本书共有 $99 + 15 = 114$ 页。

【详解】1~9 页 9 个，

10 到 99 页，有 $90 \times 2 = 180$ (个)，

$(234 - 9 - 180) \div 3 = 15$ (页)

$99 + 15 = 114$ (页)

所以，共有 15 个三位数页码。则这本书共有 114 页。

19. 91

【格木分析】本题根据自然数的排列规律及数位知识进行分析完成即可。

【详解】个位数 1~9 共用 9 个铅字；两位数 10~50 共用 $41 \times 2 = 82$ 个铅字；则共用了 $9 + 82 = 91$ (个)。

20. 35 36

【格木分析】据题意可知，书中某一页纸正、反两面的页码数相乘，积正好是 1260， $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ ，由于每页纸两面的页码相差 1，根据 1260 的质因数可得这两个数应为 $7 \times 5 = 35$ 与 $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ ，由此即可解答。

【详解】 $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ ，由于每页纸两面的页码相差 1，又因为： $5 \times 7 = 35$ 与 $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ ，即这两个页码分别是 35，36。

21. 220

【格木分析】可先找出 100 以内即 0~99 中 2 出现的次数，数字 22 相当于出现两次，则除了 200~300 之间的，其他的如 100~200, 300~600 等出现的次数与 0~99 出现的次数相同，进而最后相加求和即可。

【详解】1~99 之间：2 12 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 32 42 42 52 62 72 82 92 有 20 个，200~299 有 $100 + 20 = 120$ 个，剩下的 100~199 有 20 个，300~600 有 $3 \times 20 = 60$ 个，所以一共出现 $20 + 20 + 120 + 60 = 220$ 次。

22. 15

【格木分析】最中间的一页前面的页数与后面的页数相同，所以用 29 减去这一页再除以 2，就可以求出前面的页数，再加上 1 就是本页页数。

【详解】 $(29 - 1) \div 2 + 1 = 14 + 1 = 15$ (页)；

答：最中间的一页是第 15 页。

23. 9、10

【格木分析】如果1至30页全部相加之和为 $1+2+3+4+\cdots+30=465$ 页，由于其中的一页撕掉后，剩下的页码之和是446， $465 - 446 = 19$ ，则撕掉的是第9、10页。

【详解】 $(1+2+3+4+\cdots+30) - 446$

$$= (1+30) \times 30 \div 2 - 446$$

$$= 31 \times 30 \div 2 - 446$$

$$= 465 - 446$$

$$= 19$$

$9+10=19$ ，即撕掉的是第9、10页。

24. 56

【格木分析】当将这些页码加起来的时候，某个页码加了两次，得到不正确的结果2009，设这本书共有N页，由等差数列知， $N \times (N+1) \div 2 < 2009$ ，求出N的值后，即能求出这本书的正确页码，进而求出这个被加了两次的页码是多少页。

【详解】这本书共有N页，则：

$$N \times (N+1) \div 2 < 2009$$

$$N \times (N+1) < 4018,$$

$$\text{由于 } 63 \times 62 = 3906,$$

$$64 \times 63 = 4032,$$

$$\text{所以 } N \leq 62,$$

$$N=62 \text{ 时, } 62 \times (62+1) \div 2 = 1953 \text{ 页,}$$

$2009 - 1953 = 56$ (页). 符合题意。

即这个被加了两次的页码是56。

25. 50 37 38

【格木分析】根据题意，这本书原来页数的和一定大于1200，并且总页数为偶数。假设这本书共有n页，则有 $(1+n) \times n \div 2 > 1200$ ，即 $(1+n) \times n > 2400$ ，因为是两个连续的自然数相乘，所以 $n > 48$ ，又因为总页数为偶数，所以假设这本书共有50页，算出总页数，然后减去1200，就是被撕掉的页码之和，最后根据 $(\text{两数和}+1) \div 2 = \text{大数}$ ，求出较大的页码，进一步求出另一页码，解决问题。

【详解】假设这本书共有50页，页数和为： $1+2+3+\cdots+49+50 = (1+50) \times 50 \div 2 = 1275$ (页)；

被撕掉的页数和为： $1275 - 1200 = 75$ (页)；

被撕掉的页数为： $(75+1) \div 2 = 76 \div 2 = 38$ (页)，

$75 - 38 = 37$ (页)；

答：这本书有 50 页，撕掉的一张上的页码是 37 和 38 页。

26. 11

【格木分析】从凌晨 1 时到当日下午 1 时，经过了 12 个小时，时针走了 1 圈，分针走了 12 圈，分针每追上时针一次，就要多走一圈，多走了 11 圈，所以追上了 11 次。

【详解】时针走了 1 圈，分针走了 12 圈；

$$12 - 1 = 11 \text{ (圈)}$$

所以分针追上时针 11 次。

【点睛】本题考查的是钟面行程问题，可以按照环形跑道问题来考虑。

27. 126.5

【格木分析】钟面有 12 个大格，每一大格是 30 度，分针走一圈是 60 分，则每分钟走 $360 \div 60 = 6$ (度)，时针走一大格是 60 分，则时针每分钟走 $30 \div 60 = 0.5$ (度)。**0 时 23 分时**，时针转动了 $23 \times 0.5 = 11.5$ (度)，分针转动了 $23 \times 6 = 138$ (度)，用 138 度减去 11.5 度，就是此时分针和时针组成的最小角的度数。

$$\begin{aligned} & 6 \times 23 - 0.5 \times 23 \\ &= 138 - 11.5 \\ &= 126.5 \text{ (度)} \end{aligned}$$

北京时间 2021 年 10 月 16 日 0 时 23 分，搭载神舟十三号载人飞船的长征二号遥十三运载火箭，在酒泉卫星发射中心按照预定时间精准点火发射，约 582 秒后，神舟十三号载人飞船与火箭成功分离，进入预定轨道。23 分时，钟面上的分针和时针组成的最小角是 (126.5) 度。

【点睛】本题考查的是钟面行程问题，相当于是时针与分针的追及问题。

28. 12 60 1 小时 5 分钟

【格木分析】在钟面上，共有 12 个大格，每个大格分成 5 个小格，共有 60 个小格，时针走 1 大格是 1 时；分针走 1 小格是 1 分，走 1 大格是 5 分，走一圈是 60 分；秒针走 1 小格是 1 秒，走 1 大格是 5 秒，走一圈是 60 秒；据此进行解答。

【详解】据分析可知：

钟面上有 12 个大格，有 60 个小格。时针走一大格是 1 小时，分针走一大格是 5 分。

【点睛】此题考查在钟面上时针、分针的运行的知识。

29. 平移 旋转

【格木分析】平移，是指在平面内，将一个图形上的所有点都按照某个直线方向做相同距离的移动，这样的图形运动叫做图形的平移运动，简称平移。

旋转，是指在平面内，一个图形绕着一个定点旋转一定的角度得到另一个图形的变化叫做旋转。

【详解】根据平移和旋转的特点可以判断：火箭升空是平移现象；钟面上的时针和分针的运动是旋转现象。

【点睛】本题主要考查平移和旋转的特点。

$$30. \quad 21\frac{9}{11}$$

$$\text{【详解】} 4 \div \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{60} \right)$$

$$= 4 \div \frac{11}{60}$$

$$= 21\frac{9}{11} \text{ (分钟)}$$

$$\text{故答案为 } 21\frac{9}{11}.$$

【点睛】4点整分针指向12，时针指向4，两针相差4个大格。分针每分钟走 $\frac{1}{5}$ 大格，时针每分钟走 $\frac{1}{60}$ 大格，由此可把钟面问题转化为追及问题。利用公式追及时间=追及路程 \div 速度差求解。

$$31. \quad 22.5 \text{ 度}$$

【格木分析】钟表上1个大格对应的夹角是 $360 \div 12 = 30$ （度），2时15分时两针夹角是22.5度。

$$\text{【详解】} 15 \div 5 = 3 \text{ (分针指向3)}$$

$$15 \div 60 = \frac{1}{4} \text{ (时针过数字2的}\frac{1}{4}\text{大格)}$$

$$(1 - \frac{1}{4}) \times 30 = \frac{3}{4} \times 30 = 22.5 \text{ (度) (两针夹角 22.5 度)}$$

三、解答题

$$1. \quad 21 \text{ 次}$$

【详解】这个问题要先分类计算。先算数字“1”在页码的个位上出现的次数，然后算它在页码十位上出现的次数，最后算它在页码百位上出现的次数，把各类的次数相加就能得到最后的答案。

(1) 个位出现的次数：每10个连续页码出现一次。即1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91，一共有10次；(11是看个位上的“1”)

(2) 十位出现的次数：每100个连续页码出现十次。即10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19一共有10次；

(3) 百位出现的次数: 100 出现了一次.

$$10+10+1=21 \text{ (次).}$$

2. 14 页

【详解】排一本书的页码, 第 1 页到第 9 页, 要用 9 个数字; 第 10 页到第 99 页, 一共 90 页, 每个页码都是两位数, 要用 2 个数字, 所以一共用 $2 \times 90 = 180$ (个) 数字; 第 100 页到第 999 页一共 900 页, 每个页码都是三位数, 要用 3 个数字, 所以一共用 $3 \times 900 = 2700$ (个) 数字……

这本漫画书一共用了 19 个数字, 最大的页码应该是两位数, 是第 $(19-9) \div 2 = 5$ (个) 两位数, $9+5=14$ (页), 所以这本漫画书一共有 14 页.

3. 131 个

【详解】先要分清数字与数, 这是两个不同的概念. 数字是指 0~9 这十个数字, 而数是由数字组成的. 小丁买的画册最后一页是 70 页, 那么编这本画册一共用了 70 个数, 从第 1 页到第 9 页一共有 9 个一位数, 用了 9 个数字; 从第 10 页到第 70 页一共有 $70-9=61$ (个) 两位数, 每个两位数用 2 个数字, 所以用了 $2 \times 61 = 122$ (个) 数字; 合起来一共用了 $9+122=131$ (个) 数字.

4. 240 天

【格木分析】要使得两个古老时钟同时显现出标准时间, 那么其与标准时间相差的是 12 小时的整数倍, 12 小时是 720 分钟, 一个每天快 15 分钟 720 除以 15 得到 48, 48 天后第一次显现出标准时间; 另一个每天慢 24 分钟, 720 除以 24 得到 30, 30 天后第一次显现出标准时间, 求二者的最小公倍数即可。

【详解】 $12 \times 60 = 720$ (分)

$$720 \div 15 = 48 \text{ (天)}$$

$$720 \div 24 = 30 \text{ (天)}$$

48 和 30 的最小公倍数是 240;

答: 至少需要经过 240 天才能同时显现出标准时间。

【点睛】本题实质上考查的是公倍数的问题, 理解坏钟显现出标准时间这个条件是解题的关键。

5. (1) $16\frac{4}{11}$ 分 (2) $32\frac{8}{11}$ 分.

【详解】试题分析: (1) 当钟面上 3 点正时, 时针指向 3, 分针指向 12, 它们之间的格子是 15 个格. 分针落后时针 15 小格, 分针每分钟走 1 个格子, 时针每分钟走 $5 \div 60 = \frac{1}{12}$ (个) 格子, 分针每分钟比时针多走 $(1 - \frac{1}{12})$ 个格子, 所以 3 点多时针与分针重合在一起, 需要的时

间是 $[15 \div (1 - \frac{1}{12})]$ 分.

(2) 当时针与分针第一次张开成一条直线时, 它们之间的格子数是 30 个, 再根据它们的速度差, 可求出时间, 据此解答.

$$\text{解: (1)} \quad 15 \div (1 - \frac{1}{12})$$

$$= 15 \div \frac{11}{12}$$

$$= 16\frac{4}{11} \text{ (分)}$$

答: $16\frac{4}{11}$ 分后, 时针与分针第一次重合.

$$(2) \quad 30 \div (1 - \frac{1}{12})$$

$$= 30 \div \frac{11}{12}$$

$$= 32\frac{8}{11} \text{ (分)}$$

答: 再经过 $32\frac{8}{11}$ 分后, 时针与分针第一次张开成一条直线.

点评: 本题可看作是钟面上的追及问题进行解答, 用时针和分钟之间的格子数(路程)除以分针与时针的速度差, 就是分针追上时针用的时间。

$$6. \quad 7 \text{ 时 } 38\frac{2}{11} \text{ 分}$$

【格木分析】时针每分钟走的角度是 $360^\circ \div 12 \div 60 = 0.5^\circ$, 分针每分钟走的角度是 $360^\circ \div 60 = 6^\circ$ 。钟表上每大格是 30° , 在 7 点与 8 点之间时针与分针重合时, 分针走的角度比时针多 $30^\circ \times 7 = 210^\circ$, 根据数量关系列方程解答。

【详解】时针每分钟走的角度: $360^\circ \div 12 \div 60 = 0.5^\circ$

分针每分钟走的角度: $360^\circ \div 60 = 6^\circ$

解: 设从 7 点开始经过 x 分, 时针与分针重合。

$$6x - 0.5x = 30 \times 7$$

$$5.5x = 210$$

$$x = 38\frac{2}{11}$$

答: 钟面上时针和分针在 7 时 $38\frac{2}{11}$ 分重合。

【点睛】本题考查钟表问题，明确时针和分针重合时的走的角度差是解题的关键。

7. 108 页

【详解】我们先算一算书的页码从第 1 到第 99 页要用几个数字“0”。

(1) 个位：用 9 个“0”，即

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90;

(2) 十位：没有用“0”；

(3) 还可以用 10 个数字“0”，那么，编第 100 页用去 2 个“0”，编第 101 页～108 页用去 8 个“0”，即

101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108.

合起来正好用了 19 个数字“0”，因此这本书有 108 页。

8. 不准确

【详解】以标准时间的速度为单位 1

乙表 1 小时走了 $60 - 2 = 58$ 分

乙表的速度相当于标准时间的 $\frac{58}{60}$

乙表走 1 小时，甲表相对与乙表走 62 分，相对于乙表的速度为 $\frac{62}{60}$ ；

甲表速度相对于标准时间速度的 $\frac{58}{60} \times \frac{62}{60} = \frac{899}{900} < 1$

甲表不准确

9. $\frac{60}{67}$ 分钟

【详解】实际走了 11 小时又 10 分钟，共慢 10 分钟

$$10 \div (11 + \frac{10}{60}) = \frac{60}{67} \text{ (分钟)}$$

10. 7 点 20 分

【详解】 $(30 \times 7 - 100) \div (6 - 0.5) = 20$ (分)

11. 372 个

【详解】我们把这本书的页码分成三段计算。

(1) 1～9 一位数 9 个，共用 9 个数字；

(2) 10～99 两位数 90 个，共用数字： $(99 - 9) \times 2 = 180$ (个)；

(3) 100～160 三位数 61 个，共用数字： $(160 - 99) \times 3 = 183$ (个)

所以这本书有 160 页，共要用数字：

$$9 + 180 + 183 = 372 \text{ (个)}.$$

12. $27\frac{3}{11}$ 分

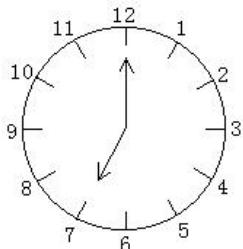
【详解】 $(2+3) \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{60}) = 5 \div \frac{11}{60} = 27\frac{3}{11}$ (分)

13. $10\frac{10}{11}$ 分

【详解】 $(8-6) \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{60}) = 2 \div \frac{11}{60} = 10\frac{10}{11}$ (分)

14. $21\frac{9}{11}$ 分

【格木分析】 如图所示，七点整，时针指向数字 7，分针指向数字 12。分针旋转速度比时针快，每个大格对应的圆心角是 30° ，3 个大格所对应的圆心角就是 90° 。也就是说分针与时针成直角，两指针相差 3 个大格。目前（7 点整）相差 7 个大格。要想相差 3 个大格，分针必须追上时针（ $7-3=4$ 个大格）。用路程差（4 格）除以速度差，就是所需追及时间。



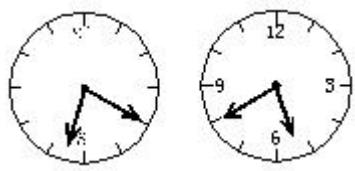
【详解】 解： $(7-3) \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{60}) = 4 \div \frac{11}{60} = 21\frac{9}{11}$ (分).

答：再过 $21\frac{9}{11}$ 分钟，时针与分针首次成直角。

15. 5 点 40 分

【格木分析】 造成晓龙与妈妈看到的钟面为同一时刻的原因在于：晓龙看到的是反射在镜面上的钟面，时针、分针经过镜面的反射其位置改变了。

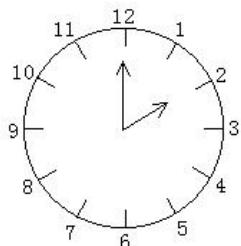
【详解】 如下图，反射前后钟面左右位置发生了互换。所以晓龙起床的实际时刻为 5 点 40 分。



$$16. 10 \frac{10}{11} \text{ 分}$$

【格木分析】如图所示，2点整时针指向数字2，分针指向数字12，在旋转过程中，分针速度快，时针速度慢，快的追慢的，当分针追上时针时，两指针就重合了，所以说这是一个追及问题.

以大格为单位，追及路程是2（个大格），时针的速度是 $\frac{1}{60}$ 格/分，分针的速度是 $\frac{1}{5}$ 格/分，用“追及路程÷速度差=追及时间”.



$$\text{【详解】解: } 2 \div (\frac{1}{5} - \frac{1}{60}) = 2 \div \frac{11}{60} = 10 \frac{10}{11} \text{ (分)}$$

答: 再通过 $10 \frac{10}{11}$ 分，时针与分针首次重合.

$$17. 295 \text{ 个}$$

【详解】950页书的页码是从1~950这950个连续自然数，数字1出现的次数可以分两类计算.

第一类：计算个位和十位上的1.

在1~99中，数字1在个位上出现10次，在十位上出现10次，共出现了20次.

同理，在100~199中，数字1在个位上还是出现10次，在十位上也是出现10次，共出现了20次.

依次类推……

而在1到50中，数字1在个位上出现5次，在十位上出现10次.

所以，在 $1 \sim 950$ 中，数字1在个位、十位上共出现：

$$20 \times 9 + 10 + 5 = 195 \text{ (次).}$$

第二类：数字1在百位上出现了100次。

$$\text{解: } 195 + 100 = 295 \text{ (个)}$$

答： $1 \sim 950$ 这950个连续自然数中各位上数字共有295个1。

$$18. \frac{365}{11} \text{分}$$

【详解】设：7点t分时两针第一次重合， $35 = (1 - \frac{1}{12}) \times t$, $t = \frac{420}{11}$ (分),

$$\text{则小敏路上用了 } \frac{420}{11} - 5 = \frac{365}{11} \text{ (分).}$$

【点睛】时钟问题里面，一定要记住分针和时针的速度表示方法。这类题目解题时要注意联系路程问题。

$$19. 6 \text{ 点 } \frac{32\frac{8}{11}}{11} \text{ 分时分针与时针重合}$$

【详解】解：在6点整时，分针落后时针 $5 \times 6 = 30$ (个)格，到分针与时针重合时，分针

要比时针多走30个格，而每分钟分钟比时针多走 $(1 - \frac{1}{12})$ 个格，所以到达这一时刻所用的

$$\text{时间为: } 30 \div (1 - \frac{1}{12}) = 32\frac{8}{11} \text{ (分). 因此所求的时刻为6点 } \frac{32\frac{8}{11}}{11} \text{ 分.}$$

$$\text{答: 在6点 } \frac{32\frac{8}{11}}{11} \text{ 分时分针与时针重合.}$$

$$20. \begin{array}{c} 5\frac{5}{11} \\ \text{开始解题时是7点} \\ \text{结束解题时是} 7\frac{38\frac{2}{11}}{11} \text{分, 共用了} 32\frac{8}{11} \text{分.} \end{array}$$

【格木分析】要求小明解题共用了多少时间，必须先求出小明解题开始时是什么时刻，解完题时是什么时刻。

(1) 小明开始解题时的时刻：因为小明开始解题时，分针与时针正好成一条直线，也就是分针与时针的夹角为 180° ，此时分针落后时针 $60 \times (180 \div 360) = 30$ (个格)，而7点整时分针落后时针 $5 \times 7 = 35$ (个格)，因此在这段时间内分针要比时针多走 $35 - 30 = 5$ (个格)，则这

$$\text{一段时间为: } 5 \div (1 - \frac{1}{12}) = 5\frac{5}{11} \text{ (分). 所以小明开始解题时是7点} 5\frac{5}{11} \text{ 分.}$$

(2) 小明解题结束时的时刻：因为小明解题结束时，两针正好重合，那么从 7 点整到这

一时刻分针要比时针多走 $5 \times 7 = 35$ (个格)，因此这一段时间为： $35 \div (1 - \frac{1}{12}) = 38\frac{2}{11}$ (分). 所

小明解题结束时是 7 点 $38\frac{2}{11}$ 分.

这样小明解题所用的时间就可以求出来了.

【详解】解： $[5 \times 7 - 60 \times (180 \div 360)] \div (1 - \frac{1}{12}) = 5\frac{5}{11}$ (分)，所以小明开始解题时是 7

点 $5\frac{5}{11}$ 分.

$5 \times 7 \div (1 - \frac{1}{12}) = 38\frac{2}{11}$ (分)，所以小明结束解题时是 7 点 $38\frac{2}{11}$ 分.

小明解题所用的时间：7 点 $38\frac{2}{11}$ 分 - 7 点 $5\frac{5}{11}$ 分 = $32\frac{8}{11}$ (分)

答：小明解题共用了 $32\frac{8}{11}$ 分.

21. 3 点钟

【详解】 因为电子钟每到整点响铃，所以我们只要考虑哪个整点亮灯就行了. 从中午 12 点起，每 9 分钟亮一次灯，要过多少个 9 分钟才到整点呢？由于 1 小时 = 60 分钟，这个问题换句话说就是：9 分钟的多少倍是 60 分钟的整数倍呢？即求 9 分和 60 最小公倍数. 9 和 60 的最小公倍数是 180. 这就是说，从正午起过 180 分钟，也就是 3 小时，电子钟会再次既响铃又亮灯.

答：下一次既响铃又亮灯时是下午 3 点钟.

22. 9 点 $49\frac{1}{11}$ 分、9 时 $23\frac{1}{13}$ 分的时候，时针和分针的位置与 7 点的距离相等

【格木分析】 (1) 当时针和分针重合时，分针和时针的位置与 7 点的距离相等，当时针指向 9 时，分针指向 12，它们相差 $9 \times 30 = 270$ 度，根据时间=路程÷速度差，可求出这时的时刻；

(2) 时针和分针位于数字“7”的两侧，9 点整时，时针与数字 7 的夹角是 $6 \times 10 = 60$ 度，分针与数字 7 的夹角是 $6 \times 35 = 210$ 度，设经过 x 分钟，两针与 7 点的距离相等，这时时针与数

字 7 的夹角为 $60+0.5x$ 度，分针与数字 7 的夹角为 $210 - 6x$ 度，根据夹角相等可列出方程，求出时间，据此解答。

本题的关键是两种情况来进行讨论然后再根据追及问题和列方程的方法进行解答。

【详解】(1) $9 \times 30 \div (6 - 0.5)$

$$= 9 \times 30 \div 5.5$$

$$= 49\frac{1}{11} \text{ (分钟)}$$

当时针和分针重合时，这时时针与分针的位置与 7 点的距离相等，这时的时刻是 9 点 $49\frac{1}{11}$ 分。

(2) 解：设经过 x 分钟，两针与 7 点的距离相等

$$60 + 0.5x = 210 - 6x$$

$$6.5x = 150$$

$$x = 23\frac{1}{13}$$

当时针和分针在 7 点的两侧，时针与分针的位置与 7 点的距离相等时的时刻是 9 时 $23\frac{1}{13}$ 分。

答：9 点 $49\frac{1}{11}$ 分、9 时 $23\frac{1}{13}$ 分的时候，时针和分针的位置与 7 点的距离相等
23. 40 个

【详解】这个问题我们可以来分类计算。

(1) 第 1 页～第 9 页，符合条件的页码有 8 个，即

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

(2) 第 10 页～第 19 页，所有页码的十位上都有数字“1”，因此都排除。

(3) 第 20 页～第 29 页，符合条件的页码有 8 个，即

22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29.

(4) 第 30 页～第 39 页，第 40 页～第 49 页，第 50 页～第 59 页，符合条件的页码都分别有 8 个， $8+8+8=24$ (个)。

因此合起来不含数字“0”和“1”的页码，一共有

$$8+8+8+8+8=40 \text{ (个)}.$$

24. 16 个

【详解】我们可以先算出画册原来用 69 个数字编到第几页，然后再算出增加页数所用的页码。 $(69-9) \div 2=30$ (页)， $30+9=39$ (页)，因此原先画册编到 39 页，后来又增加了 8 页，是从第 40 页到第 47 页，因为每个页码都是两位数，因此增加 $2 \times 8=16$ (个) 数字。

或者先估计一下这本画册最后一页的页码数是几位数，因为编完两位数的页码要用 180 个数字，而现在只用了 69 个数字，说明最后一页的页码一定是两位数，那么增加 8 页的页码也都是两位数，因此增加了 $2 \times 8 = 16$ (个) 数字。

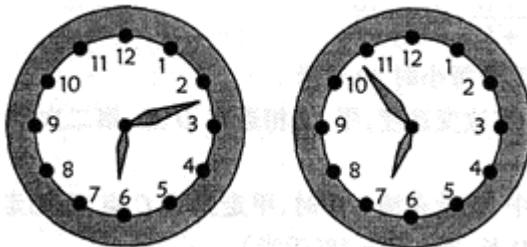
25. 十年可能有 3651 天、3652 天、3653 天。

【详解】 年份数如果是整百的倍数，如 1800, 1900，那么这个数必须是 400 的倍数才是闰年，比如 1900 年是平年，而 2000 年是闰年。

①1900 年是平年，所以比如 1898~1907 这十年间就只有一个闰年（1904 年），这十年一共是 3651 天。②比如 2009~2018 这十年间有 2 个闰年（2012 年、2016 年），这十年一共是 3652 天。③比如 2008~2017 这十年间有 3 个闰年（2008 年、2012 年、2016 年），这十年一共是 3653 天。

26. 40 分钟

【详解】 如下示意图，开始分针在时针左边 110° 位置，后来追至时针右边 110° 位置。



于是，分针追上了 $110^\circ + 110^\circ = 220^\circ$ ，对应 $\frac{220}{6}$ 格。所需时间为：

$$\frac{220}{6} \div \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{220}{6} \div \frac{11}{12} \\ = 40 \text{ (分钟)}$$

答：此人外出 40 分钟。

【点睛】 本题的关键是能求出 220° 对应的格数。

27. $27\frac{3}{11}$

【详解】 此题属于追及问题，但是追及路程是 $40 - 15 = 25$ 格（由原来的 40 格变为 15 格），速度差是 $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ ，所以追及时间是： $25 \div \frac{11}{12} = 27\frac{3}{11}$ (分)

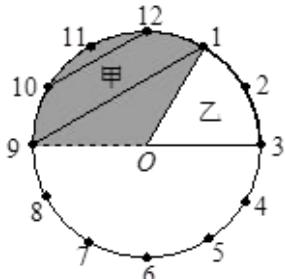
28. 1:1

【详解】 根据图形特点，可以把阴影部分甲与乙分别从不同的角度进行分解：

阴影部分甲 = 120° 的扇形 - 三角形 - 小弓形； 阴影部分乙 = 三角形 + 小弓形。

把阴影部分乙的三角形和小弓形分别转化成如下图所示的位置，可知阴影部分甲乙的面积

和=圆的面积的 $\frac{1}{3}$, 阴影部分乙的面积=圆的面积的 $\frac{1}{6}$, 所以阴影部分甲的面积=圆的面积的 $(\frac{1}{3}-\frac{1}{6})=\frac{1}{6}$ =圆的面积的 $\frac{1}{6}$ =阴影部分乙的面积. 所以甲、乙面积之比为 1:1.



29. 706 页

【详解】因为 $189 < 2010 < 2889$, 所以这本书有几百页. 由前面的分析知道, 这本书在排三位数的页码时用了数码 $(2010-189)$ 个, 所以三位数的页数有

$$(2010-189) \div 3 = 607 \text{ (页)}.$$

因为不到三位的页数有 99 页, 所以这本书共有

$$99 + 607 = 706 \text{ (页)}.$$

$$\text{解: } 99 + (2010-189) \div 3 = 706 \text{ (页)}.$$

答: 这本书共有 706 页.

30. 11 点 59 分 54 秒.

【详解】试题分析: 根据闹钟比标准时间每小时慢 30 秒, 可知标准时间过 1 小时, 即 3600 秒, 那么闹钟过 3570 秒, 再根据手表比家里的闹钟每小时快 30 秒, 知闹钟过 3600 秒时, 手表过 3630 秒, 再求出当闹钟过 3570 秒时, 手表过的秒数, 进一步求出手表比标准时间每小时慢的秒数, 今天中午 12 点到明天中午 12 点是 24 小时, 由此得出手表一昼夜比标准时间相差的秒数. 即可求出现在的手表显示几点几分几秒.

解: 标准时间过 1 小时, 即 3600 秒, 那么闹钟过 $3600 - 30 = 3570$ (秒), 当闹钟过 3600 秒时, 手表过 $3600 + 30 = 3630$ (秒),

那么当闹钟过 3570 秒时, 手表过 $3630 \times 3570 \div 3600 = 3599.75$ (秒), 即手表比标准时间每小时慢 $3600 - 3599.75 = 0.25$ (秒),

今天中午 12 点到明天中午 12 点是 24 小时, 所以手表比标准时间差: $0.25 \times 24 = 6$ (秒), 所以费叔叔的手表显示为 11 点 59 分 54 秒.

答: 费叔叔的手表显示为 11 点 59 分 54 秒.

点评: 解决此题关键是先算出手表比标准时间每小时慢的秒数, 再算出手表一昼夜比标准时间相差的秒数.

31. 1 天 11 小时 12 分钟

【详解】试题分析：因为它们同时时针和分针重合，所以那时候第一只钟经过的时间是 64 分的倍数，第二只钟经过的时间是 66 分的倍数，求 64 和 66 的最小公倍数即可。

解：64 和 66 的最小公倍数是 2112，

$2112 \div 60 = 35.2$ (小时) = 1 天 11 小时 12 分

答：当它们再次同时分针与时针重合，是 1 天 11 小时 12 分钟之后。

点评：本题的关键是让学生理解，当它们同时分针与时针重合时是 64 和 66 的最小公倍数。

初中数学

第一章 数与式

一、选择题

1. 【答案】C.

【格木解析】A 选项, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$, 故错误; B 选项, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,

故错误; C 选项, $\left(\frac{3}{a}\right)^2 = \frac{9}{a^2} (a \neq 0)$, 故正确; D 选项, $a^2 \cdot a^4 = a^{2+4} = a^6$, 故错误. 故本题选 C.

2. 【答案】D.

【格木解析】A 选项, $2a^3$ 与 a^2 不是同类项, 不能合并, 故错误; B 选项, $(3a)^2 = 9a^2$, 故错误; C 选项, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故错误; D 选项, $2a^2 \cdot a^3 = 2a^{2+3} = 2a^5$, 故正确。故本题选 D.

3. 【答案】D.

【格木解析】A 选项, $\frac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$, 故错误; B 选项, $\frac{x+y}{x-y}$ 已是最简不用约分; C 选项, $\frac{2ab^2}{6a^2b} = \frac{b}{3a}$, 故错误; D 选项, $\frac{m+n}{m^2+mn} = \frac{m+n}{m(m+n)} = \frac{1}{m}$, 故正确. 故本题选 D.

4. 【答案】A.

【格木解析】由题得 $3x^2 - 12 = 0$ 且 $x^2 + 4x + 4 \neq 0$, 解得 $x=2$. 故本题选 A.

5. 【答案】D.

【格木解析】根据题意, $\sqrt{(m-2)^2} + |m-3| = |m-2| + |m-3|$, 由 $\sqrt{(m-2)^2} +$

$|m-3|$ 化简的结果为一个常数, 则 $\begin{cases} m-2 \geq 0 \\ m-3 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $2 \leq m \leq 3$. 故本题选 D.

6. 【答案】A.

【格木解析】 $\frac{x}{x^2+2x+1} \div \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x}{(x+1)^2} \div \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) = \frac{x}{(x+1)^2} \div \left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{x}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x+1}$.

故本题选 A.

7. 【答案】D.

【格木解析】首先 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$, 因为 $a+b=3$, $ab=-1$ 带入上式后可得 $a^3 + b^3 = 3 \times (9+3) = 36$. 故本题选 D.

8. 【答案】A.

【格木解析】A 选项中 a、b 同为正是正确的, 但是 a、b 同为负时不满足. 故本题选 A

9. 【答案】B.

【格木解析】A 选项中 $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$, 故 A 选项错误; B 选项中 $a \cdot a = a^2$, 故 B 选项正确; C 选项中 $4a^6 \div 2a^2 = 2a^4$, 故 C 选项错误; D 选项中 $2a - a = a$, 故 D 选项错误; 故本题选 B.

10. 【答案】C.

【格木解析】根据 $a-b=3$, $b+c=-5$, 得 $a+c=-2$, 则 $ac-bc+a^2-ab=c(a-b)+a(a-b)=(c+a)(a-b)=-2 \times 3=-6$. 故本题选 C.

11. 【答案】B.

【格木解析】根据题意得, $x-2 \geq 0$, $\therefore x \geq 2$, 故本题选 B.

12. 【答案】C.

【格木解析】 $x + \frac{1}{x} - \sqrt{5} = 0$, 先移项再两边同时平方可得: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$ ①, 两边同时乘 x^2 可得: $x^4 + 1 = 3x^2$, ①两边继续平方得: $x^8 + \frac{1}{x^8} = 7$, 两边同时乘以 x^4 可得: $x^8 + 1 = 7x^4$, 同理可得: $x^{16} + 1 = 47x^8$, $x^{16} - 46x^8 = x^8 - 1$, 则 $|x^{16} - 46x^8 - 6x^4 - 3x^2| = |x^8 - 1 - 6x^4 - 3x^2| = |7x^4 - 1 - 1 - 6x^4 - 3x^2| = |x^4 - 3x^2 - 2| = |-1 - 2| = |-3| = 3$. 故本题选 C.

13. 【答案】A.

【格木解析】由题意知, $b = -\frac{2}{3}$, $a = b \div \frac{2}{5} = -\frac{5}{3}$, $c = b \div \frac{5}{7} = -\frac{14}{15}$, $d = b \times \frac{5}{3} = -\frac{10}{9}$, $e = \frac{b}{1.6} = -\frac{5}{12}$, 所以 $e > b > c > d > a$. 故本题选 A.

14. 【答案】D.

【格木解析】A 选项, $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \div x = x - \frac{1}{x^2}$, 故错误; B 选项, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 故错误; C 选项, $x^2 \cdot x^3 = x^5$, 故错误; D 选项, $\sqrt{x^2} = |x|$, 故正确. 故本题选 D.

15. 【答案】B.

【格木解析】由二次根式的性质, 可得 $a - 2017 \geq 0$, 即 $a \geq 2017$, 由绝对值的性质, 可得 $|2016 - a| = a - 2016$, 所以原式变形可得 $a - 2016 + \sqrt{a - 2017} = a$, 移项得 $\sqrt{a - 2017} = 2016$, 两边同时平方 $a - 2017 = 2016^2$, 则 $a - 2016^2 = 2017$. 故本题选 B.

16. 【答案】B.

【格木解析】根据 $4\sqrt{\frac{2-m}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{12-6m}$, $\sqrt{\frac{2m-3}{4}} = \frac{\sqrt{2m-3}}{2}$, 由于两者可以合并, 则代入 A 选项, $\frac{2}{3}\sqrt{12-6m} + \frac{\sqrt{2m-3}}{2} = 1 + \frac{1}{4}$ 可以合并; 代入 B 选项, $\frac{2}{3}\sqrt{12-6m} + \frac{\sqrt{2m-3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}$, 不

可以合并；代入 C 选项， $\frac{2}{3}\sqrt{12-6m} + \frac{\sqrt{2m-3}}{2} = \frac{4\sqrt{13}}{13} + \frac{\sqrt{13}}{26}$ ，可以合并；代入 D 选项， $\frac{2}{3}\sqrt{12-6m} + \frac{\sqrt{2m-3}}{2} = \frac{2\sqrt{39}}{39} + \frac{\sqrt{39}}{13}$ ，可以合并，故本题选 B.

17. 【答案】D.

【格木解析】选项 A 中，等式左边不等于右边，因式分解不正确；选项 B 中， $-x^2 + (-2)^2 = -x^2 + 4 = (2-x)(2+x)$ ，不正确；选项 C 中，应该反向写 $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ ，不正确；选项 D 中， $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2)$ ，正确。故本题选 D.

18. 【答案】C.

【格木解析】原式 $\sqrt{x^2 + 10x + 25} - \sqrt{x^2} = \sqrt{(x+5)^2} - |x|$ ，因为 $x \in (-5, 0)$ ，即可得 $\sqrt{(x+5)^2} - |x| = x+5 - (-x) = 2x+5$. 故本题选 C.

19. 【答案】C.

【格木解析】因为：A 项 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ，可化简；B 项 $\sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$ ，可化简；D 项， $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，可化简；所以它们都不是最简二次根式。故选 C.

20. 【答案】D.

【格木解析】因为 $81 < 90 < 100$ ， $\therefore \sqrt{81} < \sqrt{90} < \sqrt{100}$ ， $\therefore 9 < \sqrt{90} < 10$ ， $\therefore k=9$. 故选 D.

21. 【答案】B.

【格木解析】由二次根式的意义可知 $12-n \geq 0$ ，解得 $n \leq 12$ ，所以，当 $\sqrt{12-n}$ 等于最小的正整数 1 时，n 取最大值，则 n=11，故选 B.

22. 【答案】B.

【格木解析】 $(2\sqrt{30} - \sqrt{24}) \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{30} \times \sqrt{\frac{1}{6}} - \sqrt{24} \times \sqrt{\frac{1}{6}} = 2\sqrt{5} - 2$,

而 $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}$ ， $4 < \sqrt{20} < 5$ ，所以 $2 < 2\sqrt{5} - 2 < 3$ ，故选 B.

23. 【答案】C.

【格木解析】 把 $x=2-\sqrt{3}$ 代入代数式 $(7+4\sqrt{3})x^2 + (2+\sqrt{3})x + \sqrt{3}$ 得：

$$(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + \sqrt{3} = (7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3}) + 4 - 3 + \sqrt{3} = 49 - 48 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

故选 C.

24. 【答案】C.

【格木解析】 甲的做法是将分母有理化，去分母；乙的做法是将分子转化为平方差公

式，然后约分去分母，都正确. 故选 C.

25. 【答案】C.

【格木解析】根据分式的值为零的条件可以求出 x 的值. 由题意得 $|x|-5=0$, 且 $x^2-4x-5 \neq 0$, 由 $|x|-5=0$, 得 $x=\pm 5$; 由 $x^2-4x-5 \neq 0$, 得: $x \neq 5$, $x \neq -1$; 综上得: $x=-5$, 故选 C.

26. 【答案】C.

【格木解析】已知等式左边两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 变形后即可

得到结果: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \therefore \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{3}$, 则 $\frac{ab}{b-a} = 3$, 故选 C.

27. 【答案】D.

【格木解析】先通分算加法, 再算乘法, 最后代入求出即可.

$$(x-y+\frac{4xy}{x-y})(x+y-\frac{4xy}{x+y}) = \frac{(x-y)^2+4xy}{x-y} \cdot \frac{(x+y)^2-4xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x+y} = (x+y)(x-y),$$

当 $x+y=4\sqrt{3}$, $x-y=\sqrt{3}$ 时, 原式 $= 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 12$, 故选 D.

二、填空题

1. 【答案】 $\frac{1}{a} < a < a^2 < -a$.

【格木解析】先由点 a 在数轴上的位置确定 a 的取值范围, 用取特殊值进行计算再比较即可解决问题. 令 $a=-0.3$, 则 $-a=0.3$, $\frac{1}{a}=-\frac{10}{3}$, $a^2=0.09$, $\because 0.3>0.09>-0.3 > -\frac{10}{3}$, 所以: $-\frac{10}{3} < a < a^2 < -a$. 故答案为: $-\frac{10}{3} < a < a^2 < -a$.

2. 【答案】 1.12×10^6 .

【格木解析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值是易错点, 由于 1120000 有 7 位, 所以可以确定 $n=7-1=6$, $1120000=1.12 \times 10^6$, 故答案为 1.12×10^6 .

3. 【答案】3, 6.

【格木解析】式子 $|m-3|+6$ 的值随着 m 的变化而变化, 当 $m=3$ 时, $|m-3|+6$ 有最小值, 最小值是 6. 故答案为 3, 6.

4. 【答案】2 或 4.

【格木解析】根据平方数是非负数, 绝对值是非负数的性质可得: $(a+1)^2 \geq 0$, $|b+5| \geq 0$, $\therefore (a+1)^2 + |b+5| = b+5$, $\therefore b+5 \geq 0$, $\therefore (a+1)^2 + b+5 = b+5$, $\therefore (a+1)^2 = 0$, 解得 $a=-1$, $b \geq -5$, $\therefore |2a-b-1|=1$, $\therefore |-2-b-1|=1$, $\therefore |b+3|=1$, $\therefore b+3=\pm 1$, $\therefore b=-4$ 或 $b=-2$, \therefore 当 $a=-1$, $b=-2$ 时, $ab=2$; 当 $a=-1$, $b=-4$ 时, $ab=4$. 故答案为 2 或 4.

5. 【答案】-1.

【格木解析】 $\because -\frac{1}{2}x^{m+3}y$ 与 $2x^4y^{n+3}$ 是同类项, $\therefore m+3=4$, $n+3=1$, $\therefore m=1$, $n=-2$, $\therefore (m+n)^{2017}=(1-2)^{2017}=-1$, 故答案为-1.

6. 【答案】0.36.

【格木解析】 原式分解因式后, 将已知等式代入计算即可求出值. $\because x+y=0.2$, $x+3y=1$, $\therefore 2x+4y=1.2$, 即 $x+2y=0.6$, 则原式 $=(x+2y)^2=0.36$. 故答案为 0.36.

7. 【答案】2.

【格木解析】 $\because \sqrt{12}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{a+1}$ 是同类二次根式, 且 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\therefore a+1=3$, 解得 $a=2$. 故答案为 2.

8. 【答案】 $\sqrt{13}$.

【格木解析】 因为 $-4 < -\sqrt{13} < -3$, 所以 $2 < 6 - \sqrt{13} < 3$, 则 $6 - \sqrt{13}$ 的整数部分 $a=2$, 小数部分 $b=6 - \sqrt{13} - 2 = 4 - \sqrt{13}$, 则 $2a - b = 4 - (4 - \sqrt{13}) = \sqrt{13}$, 故答案为 $\sqrt{13}$.

9. 【答案】 $ab=0$ 且 $a \geq 0$, $b \geq 0$.

【格木解析】 由题意可知 $a+b \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, 又 $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 成立, 所以 a 、 b 中至少有一个为 0, 所以 a 、 b 满足条件是: $ab=0$ 且 $a \geq 0$, $b \geq 0$, 故答案为 $ab=0$ 且 $a \geq 0$, $b \geq 0$.

10. 【答案】 $\frac{1}{9}$.

【格木解析】 根据题意得: $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$, 解得 $x=3$, 则 $y=-2$, 故 $x^y=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

11. 【答案】 $\pm\sqrt{5}$.

【格木解析】 $\because \sqrt{x^2-4}$ 与 $\sqrt{4-x^2}$ 同时成立, $\therefore \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases}$, 故只有 $x^2-4=0$, 即 $x=\pm 2$,

又 $\because x-2 \neq 0$, $\therefore x=-2$, $y=\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{4}$, $4y-3x=-1-(-6)=5$, $\therefore 4y-3x$ 的平方根是 $\pm\sqrt{5}$. 故答案为 $\pm\sqrt{5}$.

12. 【答案】 $2\sqrt{2}$.

【格木解析】 先把 $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$ 进行变形, 再把 $a+b=-4$, $ab=2$ 代入即可. $\because a+b=-4 < 0$, $ab=2 > 0$,

$\therefore a < 0$, $b < 0$, $\therefore \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \left(-\frac{a\sqrt{ab}}{ab} \right) + \left(-\frac{b\sqrt{ab}}{ab} \right) = -\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{ab}$, 把 $a+b=-4$, $ab=2$ 代入上式

得: $-\frac{\sqrt{2} \times (-4)}{2} = 2\sqrt{2}$. 故答案为 $2\sqrt{2}$.

13. 【答案】 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x - \frac{1}{x} \neq 0 \\ 1 - \frac{1+x}{x-1} \neq 0 \end{array} \right. \quad \therefore \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x \neq -1 \end{array} \right.$$

【格木解析】由题意可知, 只有当: $x \neq 0$, $x - \frac{1}{x} \neq 0$, $1 - \frac{1+x}{x-1} \neq 0$ 时, 原分式才有意义, 解得

即当 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$ 时, 原分式有意义. 故答案为 $x \neq 0$ 且 $x \neq \pm 1$.

14. 【答案】 $\frac{a+b}{a}$.

【格木解析】甲图中的阴影面积为: $a^2 - b^2$, 乙图中的阴影面积为: $a^2 - ab$, \therefore

$$k = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)} = \frac{a+b}{a}, \text{ 故答案为 } \frac{a+b}{a}$$

15. 【答案】1.

【格木解析】

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}, \quad \therefore \frac{3x-4}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2},$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=3 \\ 2A+B=4 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} A=1 \\ B=2 \end{cases}, \text{ 故答案为 } 1.$$

16. 【答案】 $-\frac{1}{2}$

【格木解析】

$$\because \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 3, \quad \therefore y-x = 3xy, \quad \therefore \frac{x-4xy-y}{3y+5xy-3x} = \frac{-(y-x)-4xy}{3(y-x)+5xy} = \frac{-3xy-4xy}{9xy+5xy} = \frac{-7xy}{14xy} = -\frac{1}{2}.$$

17. 【答案】3 或 -1.

$$【格木解析】\because \frac{m-3}{m-1} \cdot |m| = \frac{m-3}{m-1}, \quad \therefore \begin{cases} |m|=1 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} m-3=0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } m=-1 \text{ 或 } m=3.$$

18. 【答案】3、4、5、8.

【格木解析】由题意得: $2-x < 0$, 解得 $x > 2$, 又因为 x 为正整数, 讨论如下:

当 $x=3$ 时, $\frac{6}{2-x} = -6$, 符合题意;

当 $x=4$ 时, $\frac{6}{2-x} = -3$, 符合题意;

当 $x=5$ 时, $\frac{6}{2-x} = -2$, 符合题意;

当 $x=6$ 时, $\frac{6}{2-x} = -\frac{3}{2}$, 不符合题意, 舍去;

当 $x=7$ 时, $\frac{6}{2-x} = -\frac{6}{5}$, 不符合题意, 舍去;

当 $x=8$ 时, $\frac{6}{2-x} = -1$, 符合题意;

当 $x \geq 9$ 时, $-1 < \frac{6}{2-x} < 0$, 不符合题意. 故 x 的值为 3、4、5、8.

19. 【答案】 $\frac{89}{17}$.

【格木解析】 ∵ $a+b+c=10$, ∴ $a=10-(b+c)$, $b=10-(a+c)$, $c=10-(a+b)$, 故 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$
 $= \frac{10-(b+c)}{b+c} + \frac{10-(a+c)}{a+c} + \frac{10-(a+b)}{a+b} = \frac{10}{b+c} - 1 + \frac{10}{a+c} - 1 + \frac{10}{a+b} - 1 = 10(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}) - 3$,
又 ∵ $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{14}{17}$, ∴ $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 10 \times \frac{14}{17} - 3 = \frac{89}{17}$

三、解答题

1. 【答案】3.

【格木解析】

$$\left(\frac{2m+n}{m^2-mn} + \frac{1}{m} \right) \cdot (m^2 - n^2) = \left[\frac{2m+n}{m(m-n)} + \frac{m-n}{m(m-n)} \right] \cdot (m+n)(m-n) = \frac{3m}{m(m-n)} \cdot (m+n)(m-n) = 3(m+n),$$

当 $m+n=1$ 时, 原式 $= 3 \times 1 = 3$.

2. 【答案】 $-xy$; -1 .

【格木解析】 原式 $= -4xy^2 + xy - 2y - 2xy + 2y + 4xy^2 = -4xy^2 + 4xy^2$
 $+ xy - 2xy - 2y + 2y = xy - 2xy = -xy$, 当 $x = -2$, $y = -\frac{1}{2}$ 时, 原式 $= -(-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

3. 【答案】(1) 13; (2) 12.

【格木解析】 (1) 原式 $= (a+b)^2 - 2ab = 5^2 - 2 \times 6 = 13$

(2) 原式 $= a^{2x} \times a^y = (a^x)^2 \times a^y = 2^2 \times 3 = 12$

4. 【答案】5.

【格木解析】 $x = \sqrt{5} + 1$, ∴ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (\sqrt{5}+1-1)^2 = 5$. 即 $x^2 - 2x + 1 = 5$.

5. 【答案】 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

【格木解析】 $\because x^2 - xy - 2y^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 = (x+y)(x-2y) = 10.$ \therefore 原方

程组可化为 $\begin{cases} x+y=2 \text{ ①} \\ x-2y=5 \text{ ②} \end{cases}$, ①-②得, $3y=-3$, 解得: $y=-1$. 将 $y=-1$ 代入①中得 $x-1=2$, 解得:

$x=3$, \therefore 所以原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

第二章 方程与不等式

一、选择题

1. 【答案】D.

【格木解析】A 选项, 由 $2x-3=4x$, 移项得 $2x=4x+3$, 故错误; B 选项, 由 $7x-4=3-2x$, 移项得 $7x+2x=3+4$, 故错误; C 选项, 由 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}=3x+4$, 移项得 $\frac{-1}{2}-4=3x-\frac{1}{3}x$, 故错误; D 选项, 由 $3x-4=7x+5$, 得 $3x-7x=5+4$, 故正确. 故本题选 D.

2. 【答案】D.

【格木解析】由根的判别式 $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times 5=-4<0$, 故方程没有实数根. 故本题选 D.

3. 【答案】D.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = 2a \end{cases}$$

【格木解析】根据韦达定理, $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-4a=5$, 解方程 $a^2-4a=5$, 得 $a=-1$ 或 $a=5$. $\because \Delta=a^2-8a\geqslant 0$, $\therefore a=-1$, 故本题选 D.

4. 【答案】C.

【格木解析】A 选项, 若 $a^2=b^2$, 则 a 不一定等于 b , 例如 $(-3)^2=3^2$, $-3\neq 3$, 故错误; B 选项, 若 $a>b$, 则 a^2 不一定大于 b^2 , 例如 $3>-3$, 而 $(-3)^2=3^2$, 故错误; C 选项, 若 a , b 不全为零, 则 $a^2+b^2>0$, 故正确; D 选项, 若 $a\neq b$, 则 a^2 不一定不等于 b^2 , 例如 $-3\neq 3$, 而 $(-3)^2=3^2$, 故错误. 故本题选 C.

5. 【答案】B.

【格木解析】由已知关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+x+a^2-1=0$ 的一个根是 0, 则 0 代入方程得 $a^2-1=0$, 解得 $a=1$ 或 $a=-1$, 当 $a=1$ 时, 原方程为 $x=0$, 不是一元二次方程, 因此 $a=1$ 应舍去, 则 $a=-1$. 故本题选 B.

二、填空题

1. 【答案】3.

【格木解析】两式相加, 得 $3(x+y)=3k-3$, 由 $x+y=2$, 得 $3k-3=6$, 计算得出 $k=3$, 故答案为 3.

2. 【答案】3 或 2.

【格木解析】解方程组 $\begin{cases} x-y=my+2 \\ x-2y=0 \end{cases}$, 得: $\begin{cases} x=\frac{4}{1-m} \\ y=\frac{2}{1-m} \end{cases}$ \because 解是负整数, $\therefore 1-m=-2$ 或 $1-m=-1$,

$\therefore m=3$ 或 2. 故答案为 3 或 2.

3. 【答案】20.

【格木解析】设小强同学生日的月数为 x , 日数为 y , 依题意有 $\begin{cases} x-y=2 \\ 2x+y=31 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=11 \\ y=9 \end{cases}$,

$11+9=20$. 小强同学生日的月数和日数的和为 20. 故答案为 20.

4. 【答案】95.

【格木解析】设十位数字为 x , 个位数字为 y , 根据题意所述的等量关系可得出方程

组 $\begin{cases} x+y=14 \\ 10x+y-10y-x=36 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}$ 即这个两位数为 95. 故答案为 95.

5. 【答案】312 或 344.

【格木解析】解: 第一次购物显然没有超过 100 元, 即在第一次消费 70 元的情况下, 他的实质购物价值只能是 70 元. 第二次购物消费 288 元, 则可能有两种情况, 这两种情况下付款方式不同(折扣率不同): 第一种情况: 他消费超过 100 元但不足 350 元, 这时候他是按照 9 折付款的. 设第二次实质购物价值为 x 元, 那么依题意有: $x \times 0.9 = 288$, 解得 $x = 320$. 第二种情况: 他消费不低于 350 元, 这时候他是按照 8 折付款的. 设第二次实质购物价值为 a 元, 那么依题意有: $a \times 0.8 = 288$, 解得 $a = 360$. 即在第二次消费 288 元的情况下, 他的实际购物价值可能是 320 元或 360 元. 综上所述, 他两次购物的实质价值为 $70+320=390$ 或 $70+360=430$, 均超过了 350 元. 因此均可以按照 8 折付款: $390 \times 0.8 = 312$ (元), $430 \times 0.8 = 344$ (元). 故答案为 312 元或 344 元.

三、解答题

1. 【答案】(1)AD 的长为 6 米; (2)不能围成面积为 90 平方米的花圃. 理由见解析.

【格木解析】

(1) 设 AD 的长为 x 米, 则 $AB=27-3x$, 根据题意, 得 $x(27-3x)=54$, 整理, 得 $x^2-9x+18=0$, 解得 $x_1=3$, $x_2=6$, \because 墙的最大可用长度为 12 米, $\therefore 27-3x \leqslant 12$, $\therefore x \geqslant 5$, $\therefore x=6$, 即 AD 的长为 6 米;

(2) 不能围成面积为 90 平方米的花圃. 理由如下: 根据题意, 得 $x(27-3x)=90$, 整理, 得 $x^2-9x+30=0$. $\because \Delta=(-9)^2-4 \times 1 \times 30=-39 < 0$, \therefore 该方程无实数根, \therefore 不能围成面积为 90 平方米的花圃.

2. 【答案】(1) $m>-1$ 且 $m \neq 0$; (2) 4.

【格木解析】(1) \because 关于 x 的一元二次方程 $mx^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数

根, $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (-2)^2 - 4 \times m \times (-1) > 0 \end{cases}$, 解得: $m > -1$ 且 $m \neq 0$;

(2) ∵关于的一元二次方程 $mx^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{2}{m}, x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{m} \because x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 2x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 = 3x_1 x_2 + 1, \text{ 即 } (x_1 + x_2)^2 = 3x_1 x_2 + 1,$$

$$\therefore \left(\frac{2}{m}\right)^2 = -\frac{3}{m} + 1 \text{ 即 } m^2 - 3m - 4 = 0, \text{ 解得: } m_1 = 4, m_2 = -1, \text{ 经检验, } m_1, m_2 \text{ 都是分式方程的解,}$$

$$\therefore m > -1 \text{ 且 } m \neq 0, \therefore m \text{ 的值为 } 4.$$

3. 【答案】(1) $y = -10x + 400$; (2) 30 元, 1000 元; (3) 该款电动牙刷的销售单价每支不低于 25 元, 且不高于 35 元.

【格木解析】

$$(1) \text{ 设 } y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = kx + b, \text{ 将 } (30, 100), (35, 50) \text{ 代入 } y = kx + b, \text{ 得} \begin{cases} 30k + b = 100 \\ 35k + b = 50 \end{cases},$$

$$\begin{cases} k = -10 \\ b = 400 \end{cases} \therefore y \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为 } y = -10x + 400;$$

(2) 设该款电动牙刷每天的销售利润为 w 元, 由题意得

$$w = (x - 20)y = (x - 20)(-10x + 400) = -10x^2 + 600x - 8000 = -10(x - 30)^2 + 1000, \because -10 < 0, \therefore \text{当 } x = 30 \text{ 时, } w \text{ 有最大值, } w \text{ 最大值为 } 1000. \text{ 答: 该款电动牙刷销售单价定为 } 30 \text{ 元时, 每天销售利润最大, 最大销售利润为 } 1000 \text{ 元;}$$

$$(3) \text{ 设捐款后每天剩余利润为 } z \text{ 元, 由题意可得 } z = -10x^2 + 600x - 8000 - 200 = -10x^2 + 600x - 8200, \text{ 令 } z = 550, \text{ 即 } -10x^2 + 600x - 8200 = 550, -10(x^2 - 60x + 900) = -250, x^2 - 60x + 900 = 25, \text{ 解得 } x_1 = 25, x_2 = 35, \text{ 画出每天剩余利润 } z \text{ 关于销售单价 } x \text{ 的函数关系图象如解图, 由图象可得: 当该款电动牙刷的销售单价每支不低于 } 25 \text{ 元, 且不高于 } 35 \text{ 元时, 可保证捐款后每天剩余利润不低于 } 550 \text{ 元.}$$

4. 【答案】(1) 足球单价为 40 元, 篮球的单价为 60 元; (2) 共有 1 种购买方案, 足球购买 16 个, 则篮球购买 24 个.

【格木解析】

$$(1) \text{ 设足球单价为 } x \text{ 元, 则篮球的单价为 } (x + 20) \text{ 元. 依题意得: } \frac{480}{x + 20} = \frac{320}{x} \text{ 解得: } x = 40, \text{ 经检验 } x = 40 \text{ 符合题意. } \therefore \text{足球单价为 } 40 \text{ 元, 篮球的单价为 } 60 \text{ 元.}$$

$$(2) \text{ 设足球购买 } y \text{ 个, 则篮球购买 } (40 - y) \text{ 个. 依题意得: } \begin{cases} 30y \geq 480 \\ 15(40 - y) \geq 350 \\ 40y + 60(40 - y) \leq 2100 \end{cases} \text{ 解}$$

得: $16 \leq y \leq \frac{50}{3}$ 只有一种购买方案为: 足球购买 16 个, 篮球购买 24 个.

5. 【答案】(1) 每件商品应涨价 4 元; (2) 每件涨价 17 元时每天的销售利润最大, 最大利润为 2875 元.

【格木解析】

(1) 设每件商品涨价 x 元, 由题意得: $(32+x-24)(200-5x)=2160$, 解得: $x_1=28$, $x_2=4$, 当 $x=28$ 时, 销量为: $200-5x=200-5 \times 28=60$ (件), 当 $x=4$ 时, 销量为: $200-5x=200-5 \times 4=180$ (件), \because 使销量尽可能大, $\therefore x_1=28$ 不合题意, 舍去, 取 $x_2=4$, 答: 每件商品应涨价 4 元.

(2) 设每件商品涨价 m 元时销售该商品获得的利润为 w 元, 由题意得:
 $w=(32+m-24)(200-5m)=-5(m-16)^2+2880$, \therefore 当 $m>16$ 时, w 随 m 的增大而减小, \because 每件商品的利润至少为 25 元, $\therefore 32+m-24 \geq 25$, 解得: $m \geq 17$. \therefore 当 $m=17$ 时, 利润最大, 最大利润为: $w=-5 \times (17-16)^2+2880=2875$ (元). 答: 每件涨价 17 元时每天的销售利润最大, 最大利润为 2875 元.

6. 【答案】(1) 240 个; (2) 10.

【格木解析】

(1) 设周平均增长率 x , 根据题意得 $200(1+x)^2=288$, 解得 $x_1=0.2$, $x_2=-2.2$ (舍去), 所以 $200(1+0.2)=240$ (个). 答: 今年 2 月第二周购进冰墩墩 240 个;

(2) 根据题意得 $100(200-m)+(100-m)(240+m)=41500$, 解得 $m_1=10$, $m_2=-250$ (舍去). 故 $m=10$.

第三章 变量与函数

一、选择题

1. 【答案】B.

【格木解析】根据题意，先由点 P(2a, 1-3a) 在第二象限，可知 $2a < 0$, $1-3a > 0$, 求得 $a < 0$, $a < \frac{1}{3}$, 可得 a 的取值范围: $a < 0$, 然后由点 P 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离之和为 6, 可得 $|2a| + |1-3a| = 6$, 即 $-2a + 1 - 3a = 6$, 解得 $a = -1$, 故选 B.

2. 【答案】C.

【格木解析】

A 项, 由纵坐标看出, 体育场离张强家 2.5 千米, 故 A 正确;

B 项, 由横坐标看出, $30-15=15$ 分钟, 张强在体育场锻炼了 15 分钟, 故 B 正确;

C 项, 由纵坐标看出, $2.5-1.5=1$ 千米, 体育场离早餐店 1 千米, 故 C 错误;

D 项, 由纵坐标看出早餐店离家 1.5 千米, 由横坐标看出从早餐店回家用了 $100-65=35$

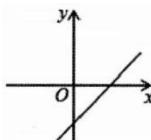
分钟 $= \frac{7}{12}$ 小时, $1.5 \div \frac{7}{12} = \frac{3}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{18}{7}$ 千米/小时, 故 D 正确. 故选 C.

3. 【答案】C.

【格木解析】由 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$, 即 $-1 \leq x < 2$. 故选 C.

4. 【答案】A.

【格木解析】 ∵ 式子 $\sqrt{k-1} + (k-1)^0$ 有意义, : $\begin{cases} k-1 \geq 0 \\ k-1 \neq 0 \end{cases}$ 解得 $k > 1$, ∴ $k-1 > 0$, $1-k < 0$, ∴



一次函数 $y=(k-1)x+1-k$ 的图象可能是:

故选 A.

5. 【答案】C.

【格木解析】 设直线 L 解析式为: $y=kx+b$, 则 L 与 x 轴交于点 A $(-\frac{b}{k}, 0)$, 与 y 轴交

于点 B(0, b), : $\begin{cases} k+b=2 \\ S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2} \times \left| -\frac{b}{k} \right| \times |b|=4 \end{cases}$, ∴ $(2-k)^2=8|k|$, ∴ $k^2-12k+4=0$ 或 $(k+2)^2=0$, ∴ $k=6 \pm 4\sqrt{2}$ 或 $k=-2$, ∴ 满足条件的直线有 3 条, 故选 C.

二、填空题

1. 【答案】 2 或 $-\frac{2}{3}$.

【格木解析】当 $x < 0$ 时, $2x < 0$, $x-3 < 0$, 由题意则有 $-2x-(x-3)=5$, 解得 $x=-\frac{2}{3}$; 当 $0 \leq x < 3$ 时, $2x \geq 0$, $x-3 < 0$, 由题意则有 $2x-(x-3)=5$, 解得 $x=2$; 当 $x \geq 3$ 时, $2x > 0$, $x-3 \geq 0$, 由题意则有 $2x+x-3=5$, 解得: $x=\frac{8}{3} < 3$ (不合题意, 舍去). 综上, x 的值为 2 或 $-\frac{2}{3}$, 故答案为 2 或 $-\frac{2}{3}$

2. 【答案】 $(-2, 2)$ 或 $(-2, -8)$.

【格木解析】 ∵直线 AB 平行于 y 轴, 点 A 的坐标为 $(-2, -3)$, ∴可设点 B 的坐标为 $(-2, m)$, ∵AB=5, ∴ $| -3 - m | = 5$, 解得 $m=2$ 或 $m=-8$. ∴点 B 的坐标为 $(-2, 2)$ 或 $(-2, -8)$. 故答案为 $(-2, 2)$ 或 $(-2, -8)$.

3. 【答案】 $y=-\frac{1}{3}x+5$.

【格木解析】 ∵直线 $y=kx+b$ 平行于直线 $y=-\frac{1}{3}x$, $\therefore k=-\frac{1}{3}$. 又 ∵截距为 5, ∴ $b=5$, ∴这条直线的解析式是 $y=-\frac{1}{3}x+5$. 故答案是: $y=-\frac{1}{3}x+5$

4. 【答案】 $y=\frac{1}{4}x+10$ ($0 < x \leq \frac{40}{3}$)

【格木解析】 容器内的水高=容器内原来的水高 10cm +放入长方体铁块后增加的水高, 依此列式即可由题意, 得 $y=10+1 \times 1 \times x \div (2 \times 2)$ 即 $y=\frac{1}{4}x+10$. 根据铁块全部在水里, 当铁块恰好没入水中时, $x=\frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{2 \cdot 2 - 1 \cdot 1}$, 解得 $x \leq \frac{40}{3}$. 因此, 答案为 $y=\frac{1}{4}x+10$ ($0 < x \leq \frac{40}{3}$).

5. 【答案】4 或-4.

【格木解析】 分别求出一次函数 $y=2x+b$ 与坐标轴的交点, 再根据三角形的面积公式求解即可. ∵令 $x=0$, 则 $y=b$; 令 $y=0$, 则 $x=-\frac{b}{2}$. ∴一次函数 $y=2x+b$ 与坐标轴的交点分别为 $(0, b), (-\frac{b}{2}, 0)$, ∵一次函数 $y=2x+b$ 与坐标轴围成的三角形面积是 4, ∴ $\frac{1}{2}|b| \cdot \left| -\frac{b}{2} \right| = 4$, 解得 $b=\pm 4$, 故答案为 4 或-4

三、解答题

1. 【答案】(1) 实际购进这种水果每千克 20 元; (2) ① $y=-11x+440$; ②销售单价定为 30 元时利润最大, 最大利润为 1100 元.

【格木解析】(1) 设实际购进这种水果每千克 x 元, 由题意得 $88x=80(x+2)$ 解得: $x=20$, 即实际购进这种水果每千克 20 元;

(2) ①设一次函数的解析式为 $y=kx+b$, 由图知, 图象过点 $(25, 165)$, $(35, 55)$, 将其

代入函数解析式可得 $\begin{cases} 25k+b=165 \\ 35k+b=55 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-11 \\ b=440 \end{cases}$, ∴ y 与 x 的函数关系式为 $y=-11x+440$; ②设利润为 w , 由题意知 $w=(x-20)y=(x-20)(-11x+440)$, 即 $w=-11x^2+660x-8800=-11(x-30)^2+1100$, 即销售单价定为 30 元时利润最大, 最大利润为 1100 元.

2. 【答案】(1) $y=15x-15$ ($4 \leq x \leq 12$ 且 x 为正整数); (2) 该疫苗生产企业有 6 个月的月生产数量不超过 90 万支.

【格木解析】

(1) 当 $1 \leq x \leq 4$ 时, 设 y 与 x 的函数关系式为. $y=\frac{k}{x}$, ∵点 $(1, 180)$ 在该函数图象上, 所以可求得 $k=180$, ∴ $y=\frac{180}{x}$ ($1 \leq x \leq 4$ 且 x 为正整数), 当 $x=4$ 时, $y=\frac{180}{4}=45$, 即该疫苗生产企业 4 月份的生产数量为 45 万支; 设技术改造完成后对应的函数解析式为 $y=ax+b$, ∵点 $(4, 45)$, $(5, 60)$ 在该函数图象上, $\begin{cases} 4a+b=45 \\ 5a+b=60 \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} a=15 \\ b=-15 \end{cases}$, ∴技术改造完成后对应的函数解

析式为 $y=15x-15$ ($4 \leq x \leq 12$ 且 x 为正整数),

(2) $\begin{cases} \frac{180}{x} \leq 90 \\ 15x-15 \leq 90 \end{cases}$ 解得: $2 \leq x \leq 7$ ∵ x 为正整数, ∴ $x=2, 3, 4, 5, 6, 7$, 答: 该疫苗生产企业有 6 个月的月生产数量不超过 90 万支.

第四章 图形与证明

第一节 平面几何初步

一、选择题

1. 【答案】D.

【格木解析】A 选项，一个锐角对应相等，利用已知的直角相等，可得出另一组锐角相等，但不能证明两三角形全等，故错误；B 选项，两个锐角对应相等，那么也就是三个对应角相等，但不能证明两三角形全等，故错误；C 选项，一条边对应相等，再加一组直角相等，不能得出两三角形全等，故错误；D 选项，两条边对应相等，若是两条直角边相等，可利用 SAS 证全等；若一条直角边对应相等，一斜边对应相等，也可证全等，故正确。故本题选 D.

2. 【答案】B.

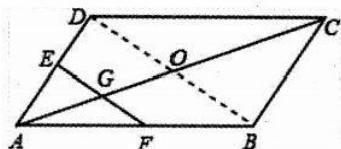
【格木解析】由 DE 是 AC 的垂直平分线， $AE=4\text{cm}$ ，则 $CE=4\text{cm}$ ， $AD=DC$ ，又由 $\triangle ABD$ 的周长为 14cm ，即 $AB+BD+AD=AB+BD+DC=14\text{cm}$ ，则 $\triangle ABC$ 的周长
 $=AB+BC+AC=AB+BD+DC+CE+AE=14+8=22\text{cm}$. 故本题选 B.

3. 【答案】C.

【格木解析】由正 n 边形的一个内角为 135° ，所以正 n 边形的一个外角为 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ，由多边形的外角和为 360° ，则 $n=360^\circ \div 45^\circ = 8$. 故本题选 C.

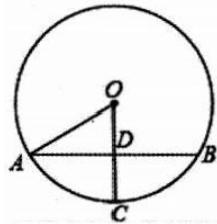
4. 【答案】B.

【格木解析】连接 BD，与 AC 相交于 O，如图所示， \because 点 E, F 分别是 AD, AB 的中点，
 $\therefore EF$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线， $\therefore EF \parallel DB$ ，且 $EF = \frac{1}{2}DB$ ， $\therefore \triangle AEF \sim \triangle ADB$ ， $\frac{AE}{AD} = \frac{AG}{AO} = \frac{EF}{DB} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore \frac{AG}{AO} = \frac{1}{2}$ ，即 G 为 AO 的中点， $\therefore AG=GO$ ， $\because OA=OC$ ， $\therefore AG:GC=1:3$. 故本题选 B.



5. 【答案】C.

【格木解析】设为圆 O，弦为 AB，半径 OC 被 AB 垂直平分于 D，连接 OA，如图所示，由题意可得： $OA=OC=12\text{cm}$ ， \because 半径 OC 被 AB 垂直平分于 D， $\therefore OD=DC$ ， $\therefore CO \perp AB$ ， \therefore 由垂径定理可得： $AD=DB$ ，在 $Rt\triangle ODA$ 中，由勾股定理可得： $AD^2 = OA^2 - OD^2$ ， $\therefore AD = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}\text{cm}$ ， $\therefore AB = 12\sqrt{3}\text{cm}$ ，则垂直平分半径的弦长为 $12\sqrt{3}\text{cm}$. 故本题选 C.



二、填空题

1. 【答案】 52°

【格木解析】 $\because AB \parallel CD, \angle EGF=64^\circ \therefore \angle BEG=\angle EGF=64^\circ$, 又 $\because EG$ 平分 $\angle BEF$, $\therefore \angle BEF=2\angle BEG=128^\circ$, $\therefore \angle AEF=180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$, 故答案为 52°

2. 【答案】 140°

【格木解析】直接利用垂直的定义结合互余以及互补的定义分析得出答案. \because 直线AB, CD相交于点O, $EO \perp AB$ 于点O, $\therefore \angle EOB=90^\circ$, $\therefore \angle EOD=50^\circ$, $\therefore \angle BOD=40^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为: $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. 故答案为 140°

3. 【答案】 30°

【格木解析】先利用补角的定义求出 $\angle EOC=60^\circ$, 再根据角平分线的性质计算. $\because \angle EOD=120^\circ$, $\therefore \angle EOC=60^\circ$ (邻补角定义). $\because OA$ 平分 $\angle EOC$, $\therefore \angle AOC=\frac{1}{2}\angle EOC=30^\circ$ (角平分线定义), $\therefore \angle BOD=30^\circ$ (对顶角相等). 故答案为 30°

4. 【答案】 30°

【格木解析】 $\because \angle AOC$ 与 $\angle BOD$ 是对顶角, $\angle BOD=70^\circ$, $\therefore \angle AOC=70^\circ$, $\because OE$ 平分 $\angle AOC$, $\therefore \angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC=35^\circ$, $\therefore \angle AOF=\angle EOF-\angle AOE=65^\circ - 35^\circ = 30^\circ$, 故答案为 30°

5. 【答案】4.

【格木解析】 $\because OC \perp AB$, $\therefore \angle 1+\angle AOE=90^\circ$, $\angle 2+\angle COD=90^\circ$, 即 $\angle 1$ 与 $\angle AOE$ 互为余角, $\angle 2$ 与 $\angle COD$ 互为余角. 又 $\because \angle 1=\angle 2$, 则相互交换又多了两对互余角, 即 $\angle 1$ 与 $\angle COD$ 互为余角, $\angle 2$ 与 $\angle AOE$ 互为余角. 所以共有4对. 故答案为4.

三、解答题

1. 【答案】(1) 54° ; (2) 详见解析.

【格木解析】(1) $\because AB, CD$ 相交于点O, $\therefore \angle AOC=\angle BOD$ (对顶角相等), $\therefore \angle BOD=36^\circ$ (已知), $\therefore \angle AOC=\angle BOD=36^\circ$, $\because OG \perp CD$ (已知), $\therefore \angle COG=90^\circ$ (垂直的定义), 即 $\angle AOC+\angle AOG=90^\circ$, $\therefore \angle AOG=90^\circ - \angle AOC=90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

(2) $\because OC$ 平分 $\angle AOE$, $\therefore \angle AOC = \angle COE$ (角平分线定义), $\because \angle COG = 90^\circ$ (已证), 即 $\angle AOC + \angle AOG = 90^\circ$, $\because \angle COE + \angle AOC + \angle AOG + \angle GOF = 180^\circ$ (平角定义), $\therefore \angle COE + \angle GOF = 90^\circ$ (等式性质), $\therefore \angle AOG = \angle GOF$ (等角的余角相等), $\therefore OG$ 是 $\angle AOF$ 的角平分线 (角平分线定义)

2. 【答案】见解析.

【格木解析】(1) $AD \parallel EF$. 理由如下: $\because \angle BDA + \angle CEG = 180^\circ$, $\angle ADB + \angle ADE = 180^\circ$, $\angle FEB + \angle CEF = 180^\circ$ $\therefore \angle ADE + \angle FEB = 180^\circ$, $\therefore AD \parallel EF$

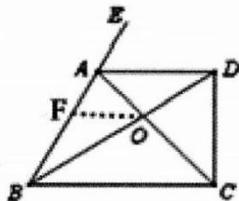
(2) $\angle F = \angle H$, 理由是: $\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$. $\because \angle EDH = \angle C$, $\therefore HD \parallel AC$, $\therefore \angle H = \angle CGH$. $\because AD \parallel EF$, $\therefore \angle CAD = \angle CGH$, $\therefore \angle BAD = \angle F$, $\therefore \angle H = \angle F$.

3. 【答案】(1) 见解析; (2) 75° ; (3) 见解析.

【格木解析】(1) 证明: $\because AC$ 平分 $\angle DCB$, $\therefore \angle BCD = 2\angle ACD = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$, $\because CD \perp AD$, $\therefore \angle ADC = 90^\circ$ $\therefore \angle BCD + \angle ADC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, $\therefore AD \parallel BC$.

(2) $\because AC$ 平分 $\angle DCB$, $\therefore \angle ACB = \angle ACD = 45^\circ$, $\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle DAC = \angle ACB = 45^\circ$, $\therefore \angle EAD = 180^\circ - \angle DAC - \angle BAC = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

(3) 过点 O 作 $OF \parallel AD$, $\because AD \parallel BC$, $\therefore OF \parallel BC$, $\therefore \angle AOF = \angle DAC$, $\angle FOB = \angle CBD$, $\therefore \angle AOB = \angle AOF + \angle FOB = \angle DAC + \angle CBD$.



第二节 三角形

一、选择题

1. 【答案】D.

【格木解析】根据三角形三边满足的条件: 两边和大于第三边, 两边的差小于第三边, 即可确定 $a+b-c > 0$, $c-a-b < 0$, 从而根据绝对值的意义将其化简. $\because a$ 、 b 、 c 是三角形的三边长, $\therefore a+b-c > 0$, $c-a-b < 0$, \therefore 原式 $= a+b-c+c-a-b=0$. 故选 D.

2. 【答案】D.

【格木解析】已知等腰三角形的两边长分别是 5 和 6, 则这个等腰三角形的第三边是 5 或 6, 均满足三角形的三边关系, 所以这个等腰三角形的周长为 $5+6+5=16$ 或 $5+6+6=17$, 故选 D.

3. 【答案】A.

【格木解析】A项不正确，因为根据三角形内角和定理求得各角的度数，其中没有直角；B项正确，因为其三边符合勾股定理的逆定理；C项正确，根据内角和公式求得三角的度数，有直角；D项正确，因为其三边符合勾股定理的逆定理。故选A。

4. 【答案】B.

【格木解析】原方程整理得 $(a+c)x^2 + 2bx + a - c = 0$ ，因为两根相等，所以 $\Delta = b^2 - 4ac = (2b)^2 - 4 \times (a+c) \times (a-c) = 4b^2 + 4c^2 - 4a^2 = 0$ ，即 $b^2 + c^2 = a^2$ ，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形，故选B。

5. 【答案】C.

【格木解析】 $\because (x-2)(x-4)=0$ ， $\therefore x-2=0$ 或 $x-4=0$ ， $\therefore x_1=2$, $x_2=4$ ， \because 当2为腰，4为底时， $2+2=4$ ，不符合三角形三边的关系， \therefore 等腰三角形的底为2，腰为4， \therefore 这个等腰三角形的周长= $2+4+4=10$. 故选C.

二、填空题

1. 【答案】6.

【格木解析】 $\because |a-3| + (b-4)^2 + \sqrt{c-5} = 0$ ， $\therefore a-3=0$, $b-4=0$, $c-5=0$ ，解得 $a=3$, $b=4$, $c=5$ ， $\because 3^2+4^2=5^2=25$ ， $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形， $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $3 \times 4 \div 2 = 6$. 故答案为 6.

2. 【答案】 $\sqrt{3}$

【格木解析】 \because 三角形三边长分别为 $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, $(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ 。 \therefore 三角形是直角三角形， $\therefore \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \text{高}$ ， \therefore 高为 $\sqrt{3}$. 故答案为 $\sqrt{3}$

3. 【答案】直角三角形.

【格木解析】由题意得： $a-6=0$, $2b-16=0$, $10-c=0$ ，解得 $a=6$, $b=8$, $c=10$ ， $\because 6^2 + 8^2 = 10^2 = 100$ ， \therefore 三角形为直角三角形，故答案为直角三角形.

4. 【答案】 75° .

【格木解析】由题意，得 $\sin \alpha - \frac{1}{2} = 0$, $\tan \beta - 1 = 0$ ，解得 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ ， $\alpha + \beta = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ ，故答案为 75° .

5. 【答案】52.

【格木解析】 $\because AC=AD=DB$, $\therefore \angle B=\angle BAD$, $\angle ADC=\angle C$. $\because \angle ADC=\angle B+\angle BAD$, $\therefore \angle ADC=\angle C=2\angle B$. 设 $\angle B=x^\circ$ ，则 $\angle C=2x^\circ$. \because 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$ ， $\therefore x+2x+102=180$. 解得 $x=26$. $\therefore \angle ADC=2x=52^\circ$ ，故答案为 52.

三、解答题

1. 【答案】(1) $3+t$; (2) $t=1$; (3) 见解析.

【格木解析】(1) 如图, 过 P 作 $PC \parallel OB$, 交 OA 于点 C, 则 $\triangle ACP$ 为等边三角形, $\therefore AC=AP=CP=2t$, $\because PC \parallel OB$, $\therefore \angle CPD=\angle OQD$, $\therefore \angle ODQ=\angle CDP$, $OQ=CP=2t$, $\therefore \triangle DOQ \cong \triangle DCP$ (AAS), $\therefore OD=CD=\frac{6-2t}{2}=3-t$, $\therefore m=CD+AC=3-t+2t=3+t$;

(2) $\because \angle AOB=\angle OQD+\angle ODQ=60^\circ$, $\angle OQP=30^\circ$, $\therefore \angle ODQ=30^\circ$, $\therefore OQ=OD$, 即 $2t=3-t$, $\therefore t=1$, $\therefore t=1$ 时, $\angle OQP=30^\circ$;

(3) $DE \parallel OB$, 理由是: 如图, 过 P 作 $PC \parallel OB$, 交 OA 于点 C, $\because \angle CPD=\angle OQD=30^\circ$, $\angle APC=60^\circ$, $\therefore \angle APD=90^\circ$, 即 $AP \perp PD$, E 点位于 AB 上. $\therefore \triangle ADP \cong \triangle EDP$. $\therefore \angle ADE=\angle ADP+\angle PDE=2\angle ADP$, $\because \angle AOB=60^\circ$, $\angle ADP=\angle ODQ=30^\circ$, $\therefore \angle AOB=\angle ADE$, $\therefore DE \parallel OB$.

2. 【答案】(1) 45° ; (2) 证明见解析; (3) 证明见解析.

【格木解析】

(1) $\because \angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle CBA=45^\circ$, $\because BF \parallel AC$, $\therefore \angle CBF=180^\circ - \angle ACB=90^\circ$, $\therefore \angle ABF=\angle CBF-\angle CBA=45^\circ$

(2) $\because \angle ACB=90^\circ$, $\therefore \angle ACE+\angle BCF=90^\circ$, $\because CE \perp AD$ 于 E, $\therefore \angle CAE+\angle ACE=90^\circ$, $\therefore \angle CAD=\angle BCF$, $\because BF \parallel AC$, $\therefore \angle ACD+\angle CBF=180^\circ$, $\therefore \angle CBF=180^\circ - \angle ACD=90^\circ$, $\therefore \angle ACD=90^\circ$

$\begin{cases} \angle ACD = \angle CBF \\ AC = CB \\ \angle CAD = \angle BCF \end{cases}$ $\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBF$ (ASA), $\therefore AD=CF$.

(3) 如下图 $\because \triangle ACD \cong \triangle CBF$, D 为 BC 中点, $\therefore CD=BF=BD$, $\because AC=BC$, $\therefore \angle CAB=\angle CBA$, $\because BF \parallel AC$, $\therefore \angle CAB=\angle ABF$, $\therefore \angle CBA=\angle ABF$, 又 $\because BF=BD$, $\therefore BO \perp DF$, $DO=OF$, 即 AB 垂直平分 DF.

3. 【答案】(1) B(4, 4); (2) 45° ; (3) 见解析,

【格木解析】(1) \because 点 B 在第一象限, 且点 B 到 x 轴、y 轴的距离都是 4, \therefore 点 B 坐标为 (4, 4). (2) 如图 1 中, 在 x 轴的负半轴上取一点 T, 使得 $OT=BE$, 连接 AT. \because 点 A(0, 4), 点 B(4, 4), 点 C(4, 0), \therefore 由已知得: $OA=AB=BC=AC=4$, \therefore 四边形 AOBC 是菱形, $\because AO \perp OC$, \therefore 菱形 AOBC 是正方形, $\therefore \angle AOT=\angle AOC=\angle BCO=\angle B=\angle OAB=90^\circ$, 在

$\begin{cases} AO = AB \\ \angle AOT = \angle B = 90^\circ, \\ BE = OT \end{cases}$ $\therefore \triangle AOT \cong \triangle ABE$ $\therefore AT=AE$, $\angle OAT=\angle BAE$, $\because \angle OAB=\angle BAE+\angle EAF+\angle OAF=90^\circ$, $\therefore \angle OAB=\angle OAT+\angle EAF+\angle OAF=\angle EAT=90^\circ$, $\because EF=BE+OF$,

$FT=OF+OT$, $OT=BE$, $\therefore FT=FE$ 在 $\triangle AFT$ 和 $\triangle AEF$ 中,

$$\begin{cases} AT = AE \\ AF = AF, \\ FT = EF \end{cases} \therefore \triangle AFT \cong \triangle AFE,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FAT = \frac{1}{2} \angle EAT = 45^\circ.$$

(3) 证明: 如图 2 中, 延长 FE 交 AB 的延长线于点 H. $\because E$ 是 BC 的中点, $\therefore EB=EC$, \because 四边形 AOCB 是正方形, $\therefore \angle EBH = \angle ECF = 90^\circ$, $AB//OC$, 在 $\triangle EBH$ 和 $\triangle ECF$ 中,

$\begin{cases} \angle EBH = \angle ECF = 90^\circ \\ EB = EC \\ \angle BEH = \angle CEF \end{cases} \therefore \triangle BEH \cong \triangle CEF \therefore EF = EH, \because AE \perp EF, \therefore \angle AEF = \angle AEH = 90^\circ$, 在 $\triangle AEF$

和 $\triangle AEH$ 中 $\begin{cases} AE = AE \\ \angle AEF = \angle AEH, \\ EF = EH \end{cases} \therefore \triangle AEF \cong \triangle AEH, \therefore \angle FAE = \angle HAE, \because AB//OC, \therefore \angle AFO = \angle BAF$,

$$\therefore \angle BAF = \angle FAE + \angle HAE = 2\angle FAE, \therefore \angle AFO = 2\angle FAE.$$

4. 【答案】(1) $AB=13$; (2) 见解析; (3) $\triangle AEF$ 周长为 24.

【格木解析】(1) \because 一次函数 $y = -\frac{12}{5}x + 12$ 的图象交 x 轴、y 轴与 A、B 两点, \therefore 当 $x=0$, 则 $y=12$, 故 $B(0, 12)$, 当 $y=0$, 则 $x=5$, 故 $A(5, 0)$, 即 $OA=5$, $OB=12$, $\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, 故 $AB=13$;

(2) \because 四边形 ABCD 是正方形, $\therefore CD=AD$, $\because BD$ 是正方形的对角线, $\therefore \angle CDE = \angle ADE$, 在 $\triangle CDE$ 和 $\triangle ADE$ 中, $\begin{cases} CD = AD \\ \angle CDE = \angle ADE, \\ DE = DE \end{cases} \therefore \triangle CDE \cong \triangle ADE$ (SAS), $\therefore \angle DCE = \angle DAE$, 设 FC 与 AD 交点为 M, $\because \angle EMD = \angle AMF$ (对顶角相等), $\angle DCM + \angle EMD = \angle MAF + \angle AMF$, $\therefore \angle DCM = \angle MAF \therefore \angle MAF = \angle EAM$, $\therefore AD$ 平分 $\angle EAF$;

(3) 过点 C 作 y 轴垂线交 y 轴于点 N, 如图所示: $\because \angle CBN + \angle NCB = \angle CBN + \angle BOA = 90^\circ$, $\therefore \angle NCB = \angle BOA$, 在 $\triangle CNB$ 和 $\triangle BOA$ 中, $\begin{cases} \angle NCB = \angle BOA \\ \angle CNB = \angle BOA = 90^\circ, \\ CB = BA \end{cases}$ 又 $\because CF \perp x$ 轴, $\therefore CF = BO + BN = 12 + 5 = 17$, $\therefore C$ 的坐标为 $(12, 17)$; $\because \triangle CDE \cong \triangle ADE$, $\therefore AE = CE \therefore AE + EF = CF = 17$, $AF = OF - AO = 12 - 5 = 7$, $\therefore C\triangle A = AE + EF + AF = CF + AF = 17 + 7 = 24$.

5. 【答案】(1) 证明见解析; (2) ① 证明见解析; ② 证明见解析.

【格木解析】(1) 证明：方法一： \because 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$ ，E是AB中点，
 $\therefore \angle CEB=\angle BEG=90^\circ$ ， $CE=BE$. \because 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AC=BC$, $AD=AE$, $\angle ACB=\angle DAE=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC=\angle AED=45^\circ$ ， $\therefore \angle GED=45^\circ$ $\because \angle FCB=\angle BDE$, $\therefore \angle FCB+\angle ABC=\angle BDE+\angle GED$. $\therefore \angle CFE=\angle BGE$, $\therefore \triangle CEF \cong \triangle BEG$ ；方法二： \because 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$ ，E是AB中点，
 $\therefore \angle CEB=\angle BEG=90^\circ$ ， $CE=BE$. \because 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中， $AC=BC$, $AD=AE$, $\angle ACB=\angle DAE=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC=\angle AED=45^\circ$ ， $\therefore \angle ECB=45^\circ$ ， $\because \angle FCB=\angle BDE$, $\therefore \angle ECB-\angle FCB=\angle AED-\angle BDE$ ，即
 $\angle ECF=\angle EBG$, $\therefore \triangle CEF \cong \triangle BEG$ ；

(2) 证明：①取AB的中点M,连接CM并延长交BD于点G.由(1)得 $\triangle CMF \cong \triangle BMG$. $\therefore CF=BG$.
 \because 在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$ ，M是AB中点， $\therefore \angle BMG=90^\circ$ ， $BM:AB=1:2$. $\because \angle DAE=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle BAD=\angle BMG$, $\because \angle ABD=\angle ABD$, $\therefore \triangle ADB \sim \triangle MGB$. $\frac{BG}{BD}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{2}$. $\therefore BG=\frac{1}{2}BD$. $\therefore CF=\frac{1}{2}BD$; ②
方法一：连接FG,由(2)知 $\triangle CMF \cong \triangle BMG$, $\angle BMG=90^\circ$, $\therefore MF=MG$, $\therefore \angle MFG=45^\circ$. $\because AD=AE$,
 $\angle DAE=90^\circ$, $\therefore \angle AED=45^\circ$, $\therefore \angle AED=\angle MFG$, $\therefore GF \parallel DE$, $\frac{BF}{BD}=\frac{BF}{BE}$ 由(2)知 $\frac{BF}{BE}=\frac{1}{2}$, \therefore
 $EF=BF$. 方法二：由(2)知 $\triangle CMF \cong \triangle BMG$, $\triangle ADB \sim \triangle MGB$, $\therefore MF=MG$, $\frac{AD}{MG}=\frac{BD}{BG}=2$. $\therefore AD=2MG$.
又 $\because AD=AE$, $\therefore AE=2MG=2MF$. 设 $MF=a$, $ME=b$, 则 $EF=a+b$, $BM=AM=2a+b$. $\therefore BF=BM-MF=2a+b-a=a+b$.
 $\therefore EF=BF$.

第三节 四边形

一、选择题

1. 【答案】D.

【格木解析】 ∵一个正 n 边形的每一个外角都是 36° ， $\therefore n=360^\circ \div 36^\circ = 10$ ，故选 D.

2. 【答案】A.

【格木解析】 设所求多边形边数为 n，则 $(n-2) \times 180^\circ = 540^\circ$ ，解得 $n=5$ ， \therefore 这个多边形的对角线的条数为： $\frac{5 \times (5-3)}{2} = 5$ ，故选 A

3. 【答案】B.

【格木解析】 设多边形有 n 条边，则 $n-2=5$ ，解得 $n=7$. 所以这个多边形的边数是 7，这个七边形有 $\frac{1}{2} \times 7 \times (7-3) = 14$ 条对角线. 故选 B.

4. 【答案】A.

【格木解析】 ∵五边形的内角和等于 540° ， $\angle A+\angle B+\angle E=\alpha$ ， $\therefore \angle BCD+\angle CDE=540^\circ - \alpha$ ， $\because \angle BCD$ 、 $\angle CDE$ 的平分线在五边形内相交于点 P， $\therefore \angle PDC+\angle PCD=\frac{1}{2}(540^\circ - \alpha)=270^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ， $\therefore \angle P=\frac{1}{2}\alpha-90^\circ$ ，故选 A.

5. 【答案】B.

【格木解析】 ∵ $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 四个角的外角和为 180° ， $\angle 5$ 的外角为 60° ， $\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=4 \times 180^\circ - 180^\circ = 540^\circ$ ， $\angle 5=120^\circ$ ， $\therefore \angle ABC+\angle CDE=(7-2) \times 180^\circ - 540^\circ - 120^\circ = 240^\circ$. \because BP、DP 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle CDE$ ， $\therefore \angle CBP+\angle CDP=120^\circ$ ， $\therefore \angle BPD=360^\circ - \angle 5 - (\angle CBP+\angle CDP)=360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$ ，故选 B.

二、填空题

1. 【答案】6.

【格木解析】 设此多边形的边数为 x，由题意得： $(x-2) \times 180=1260$ ，解得 $x=9$ ，从这个多边形的一个顶点出发所画的对角线条数： $9-3=6$ ，故答案为 6.

2. 【答案】7.

【格木解析】 设多边形的边数为 n，则有 $(n-2) \times 180=360 \times 4$ ，解得 $n=10$ ， $10-3=7$ ，即从这个多边形的一个顶点出发共有 7 条对角线，故答案为 7.

3. 【答案】 240°

【格木解析】已知等边三角形的顶角为 60° ，根据三角形的内角和定理可得两底角和 $=180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ；再由四边形的内角和为 360° 可得 $\angle\alpha + \angle\beta = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ 。故答案是 240° 。

4. 【答案】2.

【格木解析】(1) 正三角形的每个内角是 60° ，能整除 360° ，6个能组成镶嵌；(2)正五方形的每个内角是 108° ，不能整除 360° ，不能组成镶嵌；(3)正六边形的每个内角是 120° ，能整除 360° ，3个能组成镶嵌；(4)正八边形每个内角是 135° ，不能整除 360° ，不能镶嵌；(5)正十边形每个内角是 144° ，不能整除 360° ，不能镶嵌；故若只选购其中某一种地砖镶嵌地面，可供选择的地砖共有 2 种。故答案为 2。

5. 【答案】 40° 。

【格木解析】 $\because \angle ADE=60^\circ$ ， $\therefore \angle ADC=120^\circ$ ， $\because AD \perp AB$ ， $\therefore \angle DAB=90^\circ$ ， $\therefore \angle B=360^\circ - \angle C - \angle ADC - \angle A=40^\circ$ ，故答案为 40° 。

三、解答题

37

1. 【答案】(1) $DQ=16-t$, $PC=21-2t$ 或 $PC=2t-21$; (2) 当 $t=5$ 或 $\frac{37}{3}$ 秒时，四边形 PQDC 是平行四边形。

【格木解析】(1) 根据题意， $DQ=16-t$ ，当点 P 未到点 C 时， $PC=21-2t$ ；当点 P 由点 C 返回时， $PC=2t-21$ 。

(2) \because 四边形 PQDC 是平行四边形， $\therefore DQ=CP$ ，①当 P 从 B 运动到 C 时， $\because DQ=AD-AQ=16-t$, $CP=21-2t$, $\therefore 16-t=21-2t$, 解得: $t=5$; ②当 P 从 C 运动到 B 时， $\because DQ=AD-AQ=16-t$, $CP=2t-21$, $\therefore 16-t=2t-21$ 解得: $t=\frac{37}{3}$ 。 \therefore 当 $t=5$ 或 $\frac{37}{3}$ 时，四边形 PQDC 是平行四边形。

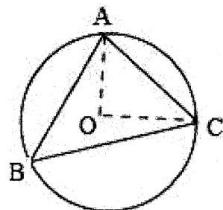
第四节 圆

一、选择题

1. 【答案】C.

【格木解析】如图：连接AO，CO， $\because \angle ABC=25^\circ$ ， $\therefore \angle AOC=50^\circ$ ， \therefore 劣弧AC的长为：

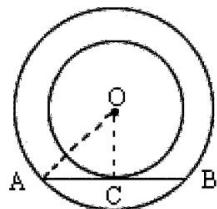
$$\frac{50\pi \times 5}{180} = \frac{25\pi}{18}$$
, 故选 C.



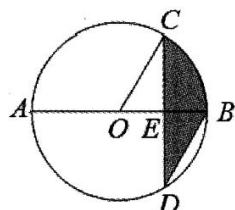
2. 【答案】B.

【格木解析】如图，连接OC，AO， \because 大圆的一条弦AB与小圆相切， $\therefore OC \perp AB$ ， $\therefore OA=6$ ， $OC=3$ ， $\therefore OA=2OC$ ， $\therefore \angle A=30^\circ$ ， $\therefore \angle AOC=60^\circ$ ， $\therefore \angle AOB=120^\circ$ ， \therefore 劣弧AB的长为：

$$\frac{120 \times 6\pi}{180} = 4\pi$$
, 故选 B.

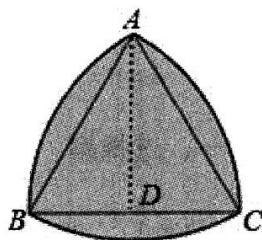


3. 【答案】D.

【格木解析】如图所示，取AB与CD的交点为E，由垂径定理知 $CE=\sqrt{3}$ ，而 $\angle COB=2\angle CDB=60^\circ$ ，所以 $OC=\frac{CE}{\sin 60^\circ}=2$ ， $OE=\frac{1}{2}OC=1$ ，接下来发现 $OE=BE$ ，可证 $\triangle OCE \cong \triangle BED$ ，所以 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{扇形 } COB}=\frac{1}{6}\pi \cdot 2^2=\frac{2\pi}{3}$ 。

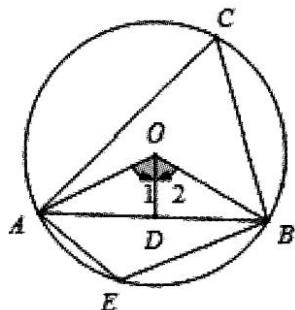
4. 【答案】D.

【格木解析】过 A 作 $AD \perp BC$ 于 D, $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB=AC=BC=2$, $\angle BAC=\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$, $\because AD \perp BC$, $\therefore BD=CD=1$, $AD=\sqrt{3}BD=\sqrt{3}$, $\therefore \triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2}BC \cdot AD=\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}=\sqrt{3}$, $S_{\text{扇形 } BAC}=\frac{60\pi \times 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$, \therefore 莱洛三角形的面积为: $S=3 \times \frac{2}{3}\pi - 2 \times \sqrt{3}=2\pi - 2\sqrt{3}$, 故选 D.



5. 【答案】D.

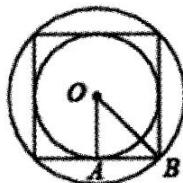
【格木解析】由图可知, $OA=10$, $OD=5$, 在 $\text{Rt } \triangle OAD$ 中, $\because OA=10$, $OD=5$, $AD=\sqrt{OA^2-OD^2}=5\sqrt{3}$, $\therefore \tan \angle 1=\frac{AD}{OD}=\sqrt{3}$, $\therefore \angle 1=60^\circ$, 同理可得 $\angle 2=60^\circ$, $\therefore \angle AOB=\angle 1+\angle 2=60^\circ+60^\circ=120^\circ$, $\therefore \angle C=60^\circ$, $\therefore \angle E=180^\circ-60^\circ=120^\circ$, 即弦 AB 所对的圆周角的度数是 60° 或 120° , 故选 D.



二、填空题

1. 【答案】1:2.

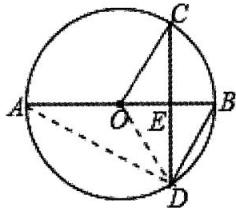
【格木解析】如图, 根据题意可知 OA 和 OB 分别是大小圆的半径, 因此设 $OA=x$, 则根据正方形的性质求出 OB 的长为 $\sqrt{2}x$, 根据相似多边形的面积比等于相似比的平方, 可得面积比为 1:2. 故答案为 1:2.



2. 【答案】 $\frac{2}{3}\pi$.

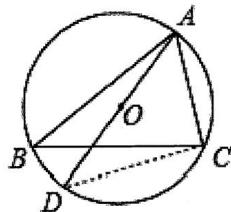
【格木解析】连接 AD, OD, \because AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD \perp AB 于点 E, $\angle ABD=60^\circ$, $CD=2\sqrt{3}$,

$\therefore \angle BAD=30^\circ$, $\therefore \angle BOD=60^\circ$, $\therefore DE=\sqrt{3}$, 在 Rt $\triangle OED$ 中, $OD=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$, \therefore 劣弧 BD 的长为: $\frac{60\pi \times 2}{180}=\frac{2}{3}\pi$. 故答案为 $\frac{2}{3}\pi$.



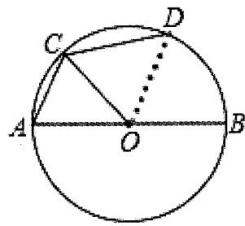
3. 【答案】 $4\sqrt{2}$.

【格木解析】连接 CD, \because AD 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACD=90^\circ$, $\therefore \angle DAC=\angle ABC$, $\angle ABC=\angle ADC$, $\therefore \angle DAC=\angle ADC$, \therefore 弧 CD=弧 AC, $\therefore AC=CD$, 又 $\because AC^2+CD^2=AD^2$, $\therefore 2AC^2=AD^2$, $\therefore AC=4$, $\therefore AD=4\sqrt{2}$. 故答案为 $4\sqrt{2}$.



4. 【答案】 125°

【格木解析】连接 OD, \because AB 是 $\odot O$ 的直径, $\angle AOC=40^\circ$, $\therefore \angle BOC=140^\circ$, $\angle ACO=(180^\circ - 40^\circ) \div 2=70^\circ$, $\because D$ 是 BC 弧的中点, $\therefore \angle COD=70^\circ$, $\therefore \angle OCD=(180^\circ - 70^\circ) \div 2=55^\circ$, $\therefore \angle ACD=\angle ACO+\angle OCD=70^\circ + 55^\circ = 125^\circ$, 故答案为 125° .



5. 【答案】 70°

【格木解析】 \because 弧 CB=弧 CD, $\therefore \angle CAB=\angle CAD=30^\circ$, $\therefore \angle BAD=60^\circ$, $\therefore \angle ABD=\angle ACD=50^\circ$, $\therefore \angle ADB=180^\circ - \angle BAD - \angle ABD=70^\circ$.

第五章 图形与变换

一、选择题

1. 【答案】C.

【格木解析】根据轴对称图形及对称轴的定义，结合所给图形即可作出判断. A 项，等边三角形有 3 条对称轴，故本选项错误；B 项，平行四边形无对称轴，故本选项错误；C 项，矩形有 2 条对称轴，故本选项正确；D 项，正方形有 4 条对称轴，故本选项错误，故选 C.

2. 【答案】C.

【格木解析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解，A 项，是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；B 项，是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误；C 项，不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项正确；D 项，是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误. 故选 C.

3. 【答案】C.

【格木解析】本题主要考查轴对称图形的性质，即对应点连线被对称轴垂直平分，只有 C 为轴对称图形. 故选 C.

4. 【答案】A.

【格木解析】根据题意，两次折叠都是沿着正方形的对角线折叠的，根据③的剪法，展开后所得图形的顶点一定在正方形的对角线上，而且中间应该是一个正方形，故选 A.

5. 【答案】D.

【格木解析】俯视图是从物体上面看所得到的图形. 从几何体上面看，是左边 2 个，右边 1 个正方形.

二、填空题

1. 【答案】 $(75\sqrt{3}+360)$.

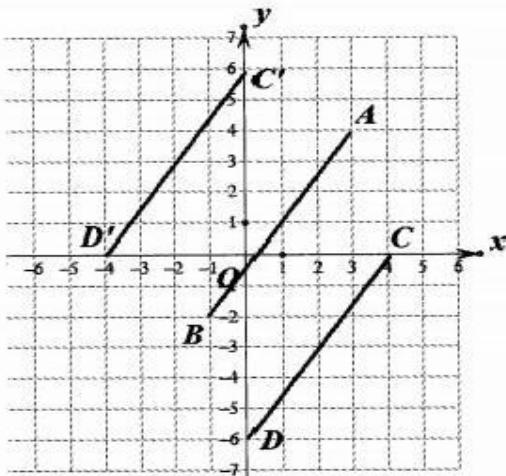
【格木解析】据图形得，纸盒的底面为正六边形，正六边形的直径为 10cm，盒子的高

为 12cm. 每个底面正六边形的面积为： $6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$ ；侧面展开为长方形，侧面
积为 $30 \times 12 = 360 \text{ cm}^2$ ，所以这个密封纸盒的表面积=2 个底的面积+侧面积：

$$2 \times \frac{75\sqrt{3}}{2} + 360 = (75\sqrt{3} + 360) \text{ cm}^2.$$

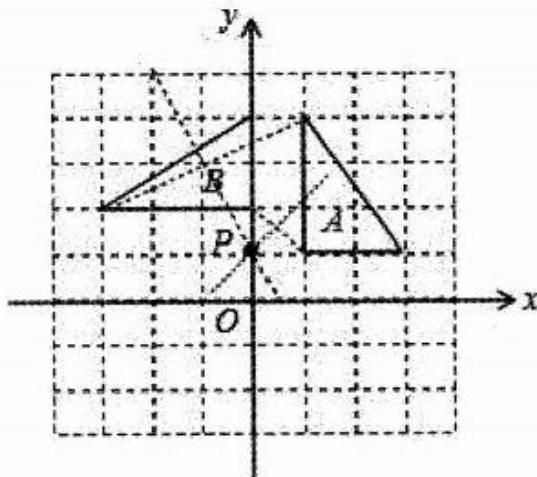
2. 【答案】(0, 6)或(4, 0).

【格木解析】如图, 将线段AB平移到CD, 且C, D在坐标轴上, 平移的结果有两种情况, $\therefore C$ 点坐标为: (0, 6)或(4, 0), 故答案为(0, 6)或(4, 0).



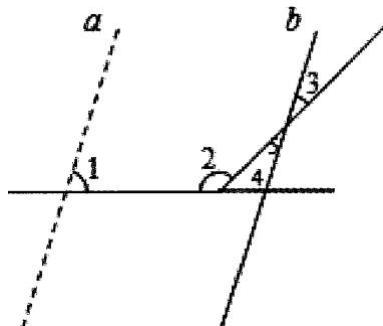
3. 【答案】(0, 1)

【格木解析】如图, 作两对对应点连线的垂直平分线, 相较于点P, 由图可知旋转中心P点坐标为(0, 1), 故答案为(0, 1)



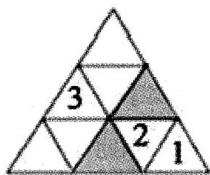
4. 【答案】 220° .

【格木解析】如图, \because 直线b平移后得到直线a, $\therefore a \parallel b$, $\therefore \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$, 即 $\angle 4 = 180^\circ - \angle 1$, $\because \angle 5 = \angle 3 = 40^\circ$, $\therefore \angle 2 = \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ - \angle 1 + 40^\circ$, $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 220^\circ$, 故答案为 220° .



5. 【答案】3.

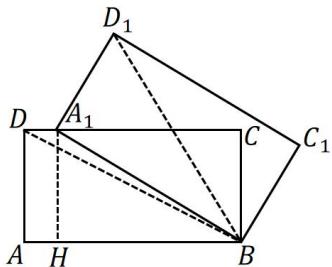
【格木解析】如下图所示，将图中标有数字“1”或“2”或“3”的三个小正三角形中的1个涂黑，整个被涂黑的图案刚好构成一个轴对称图形。 \therefore 将图中其余小正三角形涂黑一个，使整个被涂黑的图案构成一个轴对称图形的方法有共有三种，故答案为3.



三、解答题

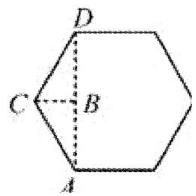
1. 【答案】 $\frac{5}{6}\pi$.

【格木解析】作 $A_1H \perp AB$ 于 H ，连接 BD 、 BD_1 ，则四边形 ADA_1H 是矩形。 $\therefore AD=HA_1=n=1$ ，在 $Rt\triangle A_1HB$ 中， $\because BA_1=BA=m=2$ ， $\therefore BA_1=2HA_1$ ， $\therefore \angle ABA_1=30^\circ$ ， \therefore 旋转角为 30° ， $\because BD=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ， $\therefore D$ 到点 D_1 所经过路径的弧长为： $\frac{30\times\pi\times\sqrt{5}}{180}=\frac{5}{6}\pi$.



2. 【答案】432cm.

【格木解析】根据题意，作出实际图形的上底面，如图：



AC、CD 是上底面的两边，过点 C 作 $CB \perp AD$ 于点 B. 易得 $\angle ACD=120^\circ$ ， $AC=CD$ ， $CB \perp AD$ ，

$$\therefore \angle CDB=30^\circ, \therefore CB=\frac{1}{2}CD, \because \text{最长对角线长 } 60\text{cm}, \therefore 2CB+CD=60\text{cm}, \therefore CB=15\text{cm}, CD=30\text{cm}, \\ \therefore BD=15\sqrt{3}, \therefore AD=30\sqrt{3}\text{cm}. \therefore \text{胶带的长至少为 } 30\sqrt{3} \times 6 + 20 \times 6 \approx 432(\text{cm}).$$

第六章 统计与概率

一、选择题

1. 【答案】A.

【格木解析】根据题干的描述 P 是方差, 如果想让方差小, 那么 a 应该取这三个数的平均数. 故本题选 A.

2. 【答案】D.

【格木解析】根据中位数的概率, 将数据按照从小到大(或从大到小)的顺序排列, 即 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 10 共 16 个数, 则位于中间的是排在第 8 位和第 9 位的数: 9 和 9, 所以中位数为 9. 故本题选 D.

3. 【答案】B.

【格木解析】A 选项中将数据按从小到大的顺序排列: 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 则

中位数是 $\frac{8+9}{2}=8.5$, 错误; B 选项中众数是 9, 正确; C 选项中平均数是

$\frac{7+7+8+8+9+9+9+10}{8}=\frac{67}{8}=8.375$, 错误; D 选项中极差是 $10-7=3$, 错误. 故本题选 B.

4. 【答案】D.

【格木解析】 $\because \bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=\frac{5}{2}, \bar{y}=\frac{3+5.5+7+m}{4}=\frac{15.5+m}{4}$, \therefore 这组数据的样本中心点

是: $\left(\frac{5}{2}, \frac{m+15.5}{4}\right)$, \because y 与 x 的线性回归方程为 $y=2.1x+0.85$, 将中心点坐标代入方程, 得 $m=8.9$. 故本题选 D.

5. 【答案】A.

【格木解析】由正态分布曲线的对称性, 知 $P(\delta \leq 0)=P(\delta \geq 4)=1-P(\delta \leq 4)=1-0.85=0.15$. 故本题选 A.

二、填空题

1. 【答案】41; 3.

【格木解析】平均数也增加 1, 而方差保持不变。

2. 【答案】23.4.

【格木解析】从图中看出, 五天的游客数量从小到大依次为 21.9、22.4、23.4、24.9、25.4, 则中位数应为 23.4, 故答案为 23.4.

3. 【答案】8.5.

【格木解析】根据图形，这 10 个学生的分数为：7、7.5、8、8、8.5、8.5、9、9、9、9.5，则中位数为 8.5，故答案为 8.5.

4. 【答案】①③②④.

【格木解析】根据生活实际的经验，可知：①从装有 1 个红球和 2 个黄球的袋子中摸出的 1 个球是白球，这个事件是不可能发生的，故可能性为 0；②随意调查 1 位青年，他接受过九年制义务教育，这个事件是有可能事件，故可能性小于 1；③花 2 元买一张体育彩票，喜中 500 万大奖，根据体彩中奖几率可知发生的可能性很小，但是不为 0；④抛掷 1 个小石块，石块会下落，这是必然事件，故发生的的可能性为 1. 故答案为①③②④.

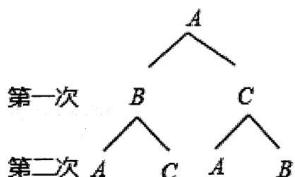
5. 【答案】 $\frac{3}{7}$.

【格木解析】绝对值小于 2 的数为：-1，0 和 1 三个，则 $P(\text{绝对值小于 } 2) = \frac{3}{7}$.

三、解答题

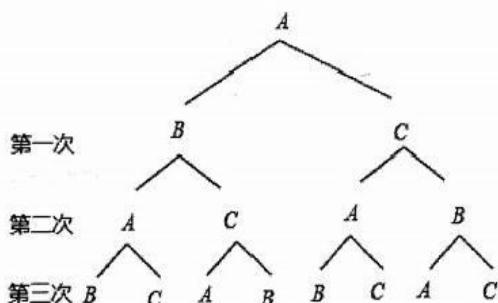
1. 【答案】(1) $\frac{1}{4}$; (2) $\frac{1}{4}$.

【格木解析】(1)画树状图得：



\because 共有 4 种等可能的结果，两次传球后，球恰在 B 手中的只有 1 种情况， \therefore 两次传球后，球恰在 B 手中的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

(2)画树状图得：



\because 共有 8 种等可能的结果，三次传球后，球恰在 A 手中的有 2 种情况， \therefore 三次传球后，

球恰在 A 手中的概率为 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ 。

$$2. \text{【答案】(1) } \frac{2}{5}; \text{ (2) } \frac{1}{3}$$

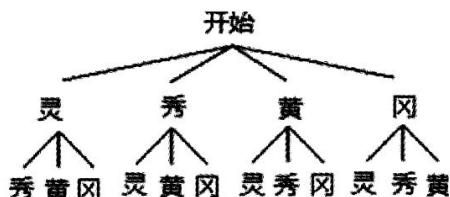
【格木解析】(1) 选购 4 只节能灯的所有可能方案: ①4 只 5w; ②1 只 10w 和 3 只 5w; ③2 只 5w 和 2 只 10w; ④3 只 10w 和 1 只 5w; ⑤4 只 10w. 买到的节能灯都为同一型号的概率为 $\frac{2}{5}$ 。

(2) 总功率不超过 30w 的情况共①②③三种, 买到两种型号的节能灯数量相等的是③, 所以其概率为 $\frac{1}{3}$ 。

$$3. \text{【答案】(1) } \frac{1}{4}; \text{ (2) } \frac{1}{3}; \text{ (3) } P_1 > P_2.$$

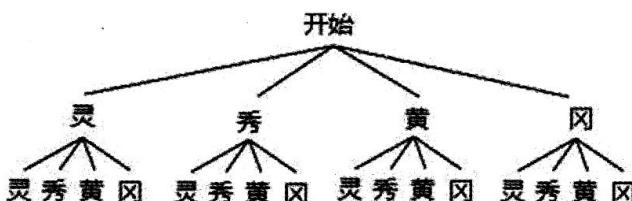
【格木解析】(1) ∵一个不透明的口袋里装有分别标有汉字“灵”“秀”“黄”“冈”的四个小球, 除汉字不同之外, 小球没有任何区别, ∴任取一球, 共有 4 种不同结果, ∴球上汉字刚好是“黄”的概率为 $\frac{1}{4}$ 。

(2) 画树状图得:



∴共有 12 种等可能的结果, 甲取出的两个球上的汉字恰能组成“灵秀”或“黄冈”的有 4 种情况, ∴ $P_1 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ 。

(3) 画树状图得:



∴共有 16 种等可能的结果, 乙取出的两个球上的汉字恰能组成“灵秀”或“黄冈”的有 4 种情况, ∴ $P_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, ∴ $P_1 > P_2$.

$$4. \text{【答案】(1) 见解析; (2) } \frac{4}{9}; \text{ (3) } \frac{2}{9}.$$

【格木解析】(1)用列表法表示(x, y)所有可能出现的结果如下:

	-2	-1	1
-2	(-2, -2)	(-2, -1)	(-2, 1)
-1	(-1, -2)	(-1, -1)	(-1, 1)
1	(1, -2)	(1, -1)	(1, 1)

(2)使分式 $\frac{x^2-3xy}{x^2-y^2} + \frac{y}{x-y}$ 有意义的(x, y)有(-1, -2)、(-2, -1)、(1, -2)、(-2, 1)4

种情况, ∴概率是 $\frac{4}{9}$ 。

(3) ∵ $\frac{x^2-3xy}{x^2-y^2} + \frac{y}{x-y} = \frac{x-y}{x+y}$, 使分式的值为整数的(x, y)有(1, -2)、(-2, 1)两种情况,

∴使分式的值为整数的(x, y)出现的概率是 $\frac{2}{9}$ 。

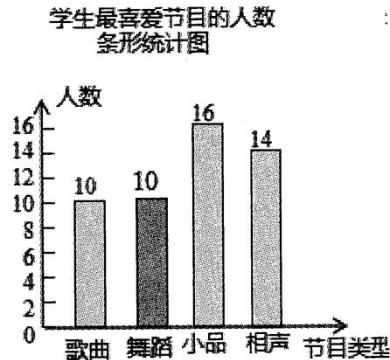
5. 【答案】(1)50; (2) 72° ; (3)见解析; (4)640; (5) $\frac{1}{3}$.

【格木解析】

(1)用最喜爱相声类的人数除以它所占的百分比即可得到调查的总人数, $14 \div 28\% = 50$, 所以本次共调查了 50 名学生。

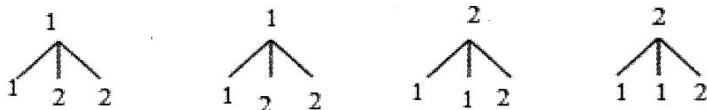
(2)用 360° 乘以最喜爱歌曲类人数所占的百分比得到“歌曲”所在扇形的圆心角的度数, 在扇形统计图中, “歌曲”所在扇形的圆心角的度数为: $360^\circ \times \frac{10}{50} = 72^\circ$ 。

(3)最喜欢舞蹈类的人数为 $50 - 10 - 14 - 16 = 10$ (人), 补全条形统计图如下图:



(4) $2000 \times \frac{16}{50} = 640$, 估计该校 2000 名学生中最喜爱小品的人数为 640 人.

(5)画树状图为:



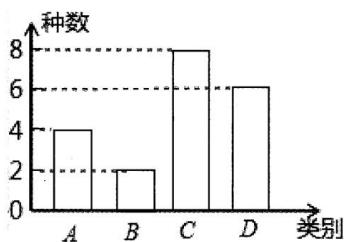
共有 12 种等可能的结果数，其中抽取的 2 名学生恰好来自同一个班级的结果数为 4，

所以抽取的 2 名学生恰好来自同一个班级的概率为： $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ 。

6. 【答案】(1) 20; 40; 72° ; (2) 见解析; (3) 36.

【格木解析】(1) 这次抽查了四类特色美食共 $4 \div 20\% = 20$ 种； $\because 8 \div 20 = 0.4 = 40\%$ ， $\therefore a = 40$ ； $\because 360 \times 20\% = 72$ ， \therefore 扇形统计图中 A 部分圆心角的度数为 72° 。

(2) 如图：



(3) $120 \times \frac{6}{20} = 36$ (种)，故估计约有 36 种属于豆制品类。

高中数学

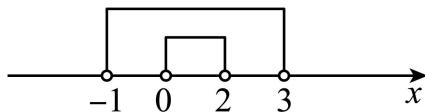
第一章 集合与简易逻辑

一、选择题

1. A

【分析】画出数轴，结合小范围可以推出大范围即可求得结果。

【详解】如图所示，



所以 $p \Rightarrow q$, $q \not\Rightarrow p$, 故 p 是 q 的充分不必要条件。

故选：A.

2. A

【分析】化简集合，根据交集运算求解。

【详解】根据题意，得 $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$,

所以 $A \cap B = \{0, 1\}$,

故选：A.

3. B

【分析】存在量词命题的否定是全称量词命题，把存在改为任意，把结论否定。

【详解】“ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq |x|$ ” 的否定是 $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > |x|$.

故选：B.

4. D

【分析】先求出集合 A ，再求两集合的交集即可

【详解】由 $x^2 - x - 2 \geq 0$, 得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 2$

所以 $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$,

因为 $B = \{-2, -1, 0, 1\}$,

所以 $A \cap B = \{-2, -1\}$.

故选：D

5. B

【分析】根据补集、交集的定义计算可得。

【详解】由 $B = \{x | 1 < x \leq 5\}$, 则 $C_R B = (-\infty, 1] \cup (5, +\infty)$,

又 $A = \{x | -1 \leq x < 3\}$, 所以 $A \cap (C_R B) = [-1, 1]$.

故选: B.

6. B

【分析】根据集合相等的条件及分式 $\frac{b}{a}$ 有意义可知 $a \neq 0, \frac{b}{a} = 0$, 进而求出 $b = 0$, 代入集合验证可求出 a 的值, 进一步计算即可.

【详解】根据集合相等的条件及分式 $\frac{b}{a}$ 有意义可知 $a \neq 0, \frac{b}{a} = 0$,

则 $b = 0$,

代入集合得 $\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$,

则 $\begin{cases} a^2 = 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$, 得 $a = -1$

因此 $a^{2019} + b^{2019} = (-1)^{2019} + 0^{2019} = -1$.

故选: B.

7. B

【分析】解一元二次不等式化简集合 A , 再利用交集的定义求解作答.

【详解】解不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$, 得 $-2 < x < 4$, 即 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, 而 $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

所以 $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$.

故选: B

8. A

【分析】根据给定条件, 求出集合 A , 再借助韦达定理求解作答.

【详解】由全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_U A = \{2, 3\}$, 得 $A = \{1, 4\}$,

即 1, 4 是方程 $x^2 - 5x + m = 0$ 的两个根, 于是 $\begin{cases} \Delta = 5^2 - 4m > 0 \\ 1 + 4 = 5 \\ 1 \times 4 = m \end{cases}$, 解得 $m = 4$,

所以 m 的值等于 4.

故选: A

9. D

【分析】由题意可知 $B \subseteq A$, 对集合 B 分等于空集和不等于空集两种情况讨论, 分别求出符合题意的 a 的值即可.

【详解】集合 $A = \{x | x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$,

$\because A \cap B = B$, $\therefore B \subseteq A$,

①当 $B = \emptyset$ 时, $a = 0$, 符合题意,

②当 $B \neq \emptyset$ 时, $a \neq 0$, $B = \{x|ax - 2 = 0\} = \left\{x|x = \frac{2}{a}\right\}$,

则有 $\frac{2}{a} = -2$ 或 $\frac{2}{a} = 2$, 解得: $a = -1$ 或 $a = 1$,

综上所述, 实数 a 的所有可能的取值组成的集合为 $\{-1, 0, 1\}$

故选: D

10. A

【分析】利用集合交集的定义直接求得.

【详解】因为 $A = \{x||x - 1| < 2\}$, 则 $-2 < x - 1 < 2$, 即 $-1 < x < 3$, 所以 $A = \{x|-1 < x < 3\}$,

因为 $B = \{x|x = 3n - 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 所以 $A \cap B = \{1\}$.

故选: A.

11. B

【分析】化简集合 A, B , 利用集合补集和交集的概念求出 $(C_R A) \cap B$ 进而得到元素个数即可.

【详解】由 $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 5) \geq 0$ 解得 $x \geq 4$ 或 $x \leq 1$,

所以 $A = \{x|x \geq 4\text{ 或 }x \leq 1\}$, $C_R A = \{x|1 < x < 4\}$,

又因为 $B = \{x \in \mathbb{Z}||x - 1| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Z}|-1 \leq x \leq 3\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,

所以 $(C_R A) \cap B = \{2, 3\}$, 元素个数为 2,

故选: B

12. B

【分析】由交集的定义求解即可.

【详解】因为集合 $A = \{2, 3, 4, 5\}$, 集合 $B = \{1, 3, 5\}$,

则 $A \cap B = \{3, 5\}$.

故选: B.

13. D

【分析】求解二次不等式, 再求交集即可.

【详解】 $B = \{x|x^2 - x - 2 < 0\} = \{x|(x - 2)(x + 1) < 0\} = \{x|-1 < x < 2\}$, 故 $A \cap B = [0, 2)$.

故选: D

14. A

【分析】根据充分必要条件的定义进行判断即可.

【详解】解: 当 $x < 1$ 时, $x < 2$ 成立,

当 $x < 2$ 时, $x < 1$ 不一定成立, 如 $x = \frac{3}{2}$,

故 $x < 1$ 是 $x < 2$ 的充分不必要条件,

故选: A.

15. C

【分析】全称量词命题的否定是存在量词命题, 把任意改为存在, 把结论否定.

【详解】命题 “ $\forall x < 5, -x^2 + 2x \geq 3$ ” 的否定是 “ $\exists x < 5, -x^2 + 2x < 3$ ”.

故选: C

16. B

【分析】由交集的定义, 找出两集合的公共元素即可.

【详解】由题意 $-2 \leq -1 \leq 2, -2 \leq 1 \leq 2, -2 \leq 3 \leq 2$, 所以由交集的定义可知 $A \cap B = \{-1, 1\}$.

故选: B.

17. C

【分析】用列举法表示集合 U , 再利用补集、交集的定义求解作答.

【详解】依题意, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 而 $T = \{3, 5, 7\}$, 则 $C_U T = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, 又 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $S \cap (C_U T) = \{1, 2, 4\}$.

故选: C

18. D

【分析】进行交集的运算即可.

【详解】因为 $A = \{1, 4, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\therefore A \cap B = \{4, 5\}$.

故选: D.

19. A

【分析】解一元二次不等式求出集合 A , 再求并集可得答案.

【详解】因为集合 $A = \{x|x^2 - 3x - 4 \leq 0\} = \{x|-1 \leq x \leq 4\}$,

又 $B = \{x|1 < x < 5\}$,

所以 $A \cup B = \{x|-1 \leq x < 5\}$.

故选: A.

20. C

【分析】根据补集与交集的运算, 可得答案.

【详解】由题意, $C_U B = \{2, 4\}$, $A \cap (C_U B) = \{2\}$.

故选: C.

二、填空题

1. 充要

【分析】根据集合之间的关系及充分、必要性定义判断条件间的关系.

【详解】由 $A \cap B = A$, 则 $A \subseteq B$, 故 $C_U B \subseteq C_U A$, 充分性成立;

由 $C_U B \subseteq C_U A$, 则 $A \subseteq B$, 故 $A \cap B = A$, 必要性成立;

所以“ $A \cap B = A$ ”是“ $C_U B \subseteq C_U A$ ”的充要条件.

故答案为: 充要

2. $(3, +\infty)$

【分析】根据二次函数的性质求解最值即可.

【详解】 $\forall x \in [0,3], x^2 - 2x < m$, 只需 $(x^2 - 2x)_{\max} < m$,

$x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$, 当 $x = 3$ 时取最大值为3, 所以 m 的取值范围为 $(3, +\infty)$.

故答案为: $(3, +\infty)$.

3. $\{4\}$

【分析】根据元素与集合的关系以及集合的互异性可求出结果.

【详解】因为 $4 \in A$, 即 $4 \in \left\{2, 3, a^2 - 3a, a + \frac{2}{a} + 7\right\}$,

所以 $a^2 - 3a = 4$ 或 $a + \frac{2}{a} + 7 = 4$,

若 $a^2 - 3a = 4$, 则 $a = -1$ 或 $a = 4$;

若 $a + \frac{2}{a} + 7 = 4$, 即 $a^2 + 3a + 2 = 0$, 则 $a = -1$ 或 $a = -2$.

由 $a^2 - 3a$ 与 $a + \frac{2}{a} + 7$ 互异, 得 $a \neq -1$,

故 $a = -2$ 或 $a = 4$,

又 $4 \notin B$, 即 $4 \notin \{|a - 2|, 3\}$, 所以 $|a - 2| \neq 4$, 解得 $a \neq -2$ 且 $a \neq 6$,

综上所述, a 的取值集合为 $\{4\}$.

故答案为: $\{4\}$

4. $a \geq 1$

【分析】由充分不必要条件的概念转化为集合真子集的关系求解参数的取值范围即可.

【详解】由已知得 $\neg p: -3 \leq x \leq 1$, $\neg q: x \leq a$.

设 $A = \{x | -3 \leq x \leq 1\}$, $B = \{x | x \leq a\}$

若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件, 则 $\neg p \Rightarrow \neg q$, $\neg q \Rightarrow \neg p$,

所以集合 A 是集合 B 的真子集.

所以 $a \geq 1$.

故答案为: $a \geq 1$.

5. (0,8)

【分析】由不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 可得 $\Delta < 0$, 即可得解.

【详解】由不等式 $x^2 - ax + 2a > 0$ 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 恒成立,

可得 $\Delta = a^2 - 8a < 0$, 解得 $0 < a < 8$,

所以实数 a 的取值范围是 $(0,8)$.

故答案为: $(0,8)$.

6. 1

【分析】根据集合相等求得 x, y , 从而求得正确答案.

【详解】依题意可知 $x \neq 0$, 由于 $A = B$,

所以 $y = 0$, 此时 $A = \{x, 0, 1\}, B = \{x^2, x, 0\}$,

所以 $x^2 = 1$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 1$ (舍去),

所以 $x^{2022} + y^{2023} = 1$.

故答案为: 1.

7. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$

【分析】根据存在量词命题的否定的知识写出正确答案.

【详解】原命题是存在量词命题, 其否定是全称量词命题,

所以原命题的否定是: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$.

故答案为: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 2 \leq 0$.

8. 31

【分析】根据集合 $M = \{m \in \mathbb{Z} | x^2 + mx - 36 = 0 \text{ 有整数解}\}$, 结合韦达定理可求出集合 M , 再由题目信息中集合 A 满足的两个条件, 得到集合 M 中互为相反数的两个元素同属于集合 A 或同不属于集合 A , 即可求解.

【详解】因为 $x^2 + mx - 36 = 0$ 的整数解只能是 36 的约数,

当方程的解为 $-1, 36$ 时, $m = -35$; 当方程的解为 $-2, 18$ 时, $m = -16$;

当方程的解为 $-3, 12$ 时, $m = -9$; 当方程的解为 $-4, 9$ 时, $m = -5$;

当方程的解为 $-6, 6$ 时, $m = 0$; 当方程的解为 $1, -36$ 时, $m = 35$;

当方程的解为 $2, -18$ 时, $m = 16$; 当方程的解为 $3, -12$ 时, $m = 9$;

当方程的解为 $4, -9$ 时, $m = 5$;

故集合 $M = \{-35, -16, -9, -5, 0, 5, 9, 16, 35\}$

由非空集合 A 满足条件: (1) $A \subseteq M$, (2) 若 $a \in A$, 则 $-a \in A$,

即集合 M 中互为相反数的两个元素同属于集合 A 或同不属于集合 A , 得这样的集合共有 $2^5 - 1 = 31$ 个,
故答案为: 31.

9. 0 或 -1

【分析】结合集合中元素的互异性求解即可.

【详解】 $\because A \cup B = A$,

$$\therefore \begin{cases} m^2 \neq m, \\ m^2 = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} m^2 \neq 1, \\ m^2 = m \end{cases}$$

解得 $m = -1$, 或 $m = 0$

故答案为: 0 或 -1

10. 0 或 1

【分析】分类讨论确定集合 A 中元素或元素个数后得出其子集个数, 从而得结论.

【详解】 $a = 0$ 时, $A = \{-\frac{1}{2}\}$, 子集只有两个, 满足题意,

$a \neq 0$ 时, 若 $\Delta = 4 - 4a < 0$ 即 $a > 1$, 则 $A = \emptyset$, 子集只有 1 个, 不满足题意;

若 $\Delta > 0$, 即 $a < 1$, 则集合 A 有两个元素, 子集有 4 个, 不满足题意,

$a = 1$ 时, $\Delta = 0$, $A = \{-1\}$, 子集只有两个, 满足题意,

所以 $a = 0$ 或 1.

故答案为: 0 或 1,

11. $[3, +\infty)$

【分析】先化简不等式 $|x| < a$, 再根据充分条件的定义求解.

【详解】解: 由题意知: $a > 0$,

由不等式 $|x| < a$ 得 $-a < x < a$,

因为不等式 $|x| < a$ 的一个充分条件为 $-3 < x < 0$,

所以 $-a \leq -3$, 解得 $a \geq 3$,

所以实数 a 的取值范围是 $[3, +\infty)$,

故答案为: $[3, +\infty)$

12. $[-4, 2]$

【分析】根据指数函数单调性和分式不等式的解法可求得集合 A , 根据并集结果可确定 a 的取值范围.

【详解】由 $2^{\frac{x+4}{x-2}} \leq 1$ 得: $\frac{x+4}{x-2} \leq 0$, 即 $\begin{cases} (x+4)(x-2) \leq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$, 解得: $-4 \leq x < 2$, $\therefore A = \{x | -4 \leq x < 2\}$;

$\because A \cup B = \{x|x < 2\}$, $B = \{x|x < a\}$, $\therefore -4 \leq a \leq 2$, 即实数 a 的取值范围为 $[-4, 2]$.

故答案为: $[-4, 2]$.

13. $\{0\} \cup \left\{ a \mid a \leq -\frac{1}{2} \right\}$

【分析】根据题意可得集合 A 中元素的个数为 1 或 0 个, 再分情况讨论即可, 注意 $a = 0$ 这种情况.

【详解】解: 因为集合 $A = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + 2(a+1)x + a = 0\}$ 没有非空真子集,

所以集合 A 中元素的个数为 1 或 0 个,

当集合 A 中元素的个数为 1 个时,

若 $a = 0$, 则有 $2x = 0$, 解得 $x = 0$, 符合题意,

若 $a \neq 0$, 则有 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4a^2 = 0$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$,

当集合 A 中元素的个数为 0 个时,

则 $\begin{cases} \Delta = 4(a+1)^2 - 4a^2 < 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$, 解得 $a < -\frac{1}{2}$,

综上 $a = 0$ 或 $a \leq -\frac{1}{2}$,

即实数 a 构成的集合为 $\{0\} \cup \left\{ a \mid a \leq -\frac{1}{2} \right\}$.

故答案为: $\{0\} \cup \left\{ a \mid a \leq -\frac{1}{2} \right\}$.

14. ①②③⑤

【分析】根据元素与集合的关系、集合与集合的关系以及空集的定义和性质, 逐个判断关系式.

【详解】①根据元素与集合的关系可知 $0 \in \{0\}$ 正确;

②集合中的元素只有一个 \emptyset , 所以 $\emptyset \in \{\emptyset\}$ 正确;

③根据空集是任何集合的子集可知 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ 正确;

④空集不含任何元素, 集合 $\{\emptyset\}$ 有一个元素 \emptyset , 所以 $\emptyset = \{\emptyset\}$ 不正确;

⑤因为任何集合都是本身的子集, 故 $A \supseteq A$ 正确;

⑥由集合的交集运算可知 $A \cap A = A$, 故 $A \cap A = \emptyset$ 不正确.

故正确的有 ①②③⑤.

故答案为: ①②③⑤.

15. $k \leq -7$ 或 $k \geq 1$

【分析】解一元二次不等式得到解集, 根据充分不必要条件可知 $(-4, 1)$ 是 $(-\infty, k) \cup (k +$

$(3, +\infty)$ 的真子集，列不等式组求 k 的范围.

【详解】由 $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1) < 0$, 则 $-4 < x < 1$,

由 $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k = (x-k)(x-k-3) > 0$, 则 $x < k$ 或 $x > k+3$,

因为 “ $x^2 + 3x - 4 < 0$ ” 是 “ $x^2 - (2k+3)x + k^2 + 3k > 0$ ” 的充分不必要条件,

所以 $(-4, 1)$ 是 $(-\infty, k) \cup (k+3, +\infty)$ 的真子集,

则 $k \geq 1$ 或 $k+3 \leq -4$, 即 $k \geq 1$ 或 $k \leq -7$.

故答案为: $k \leq -7$ 或 $k \geq 1$.

$$16. \forall x \in \mathbb{R}, \sin x \geq \frac{1}{2}x$$

【分析】根据存在量词命题的否定形式, 直接求解.

【详解】存在量词命题的否定是全称量词命题, 即 $\neg p$: “ $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x \geq \frac{1}{2}x$ ”.

$$\text{故答案为: } \forall x \in \mathbb{R}, \sin x \geq \frac{1}{2}x$$

$$17. \{x | 1 \leq x < 3\}$$

【分析】求出集合 A , 利用补集的定义可求得集合 $C_U A$.

【详解】由 $\frac{2}{x-1} \leq 1$ 可得 $1 - \frac{2}{x-1} = \frac{x-3}{x-1} \geq 0$, 解得 $x < 1$ 或 $x \geq 3$, 即 $A = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 3\}$,

又因为 $U = \mathbb{R}$, 因此, $C_U A = \{x | 1 \leq x < 3\}$.

故答案为: $\{x | 1 \leq x < 3\}$.

$$18. \{x | -3 < x \leq 1\}$$

【分析】由题知 $A = \{x | -3 < x \leq 2\}$, $B = \{x | -5 \leq x \leq 1\}$, 再求集合交集运算即可.

【详解】解: 不等式 $\frac{2x+1}{x+3} \leq 1$ 即为 $\frac{2x+1}{x+3} - 1 = \frac{x-2}{x+3} \leq 0$,

所以 $\begin{cases} (x-2)(x+3) \leq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-3 < x \leq 2$,

所以, $A = \{x | -3 < x \leq 2\}$

解不等式 $|x+2| \leq 3$ 得 $-5 \leq x \leq 1$, 即 $B = \{x | -5 \leq x \leq 1\}$,

所以, $A \cap B = \{x | -3 < x \leq 1\}$.

故答案为: $\{x | -3 < x \leq 1\}$

$$19. (-3, 1]$$

【分析】由题知 $\forall x \in \mathbb{R}, (a-1)x^2 + 2(a-1)x - 4 < 0$ 为真命题, 再分 $a=1$ 和 $a \neq 1$ 两种情况讨论求解即可.

【详解】解: 由题意, 得 $\forall x \in \mathbb{R}, (a-1)x^2 + 2(a-1)x - 4 < 0$ 为真命题,

当 $a = 1$ 时， $-4 < 0$ ，满足题意；

当 $a \neq 1$ 时， $\begin{cases} \Delta = 4(a-1)^2 - 4(a-1) \times (-4) < 0 \\ a-1 < 0 \end{cases}$ ，解得 $-3 < a < 1$.

综上，实数 a 的取值范围是 $(-3, 1]$.

故答案为： $(-3, 1]$

20. 4 或 $\frac{3}{4}$

【分析】根据集合相等，可得集合中的元素对应相等，分类讨论即可求解.

【详解】由 $A \subseteq B$ ，且 $A \supseteq B$ 可得 $A = B$ ，由于 A, B 中都有元素 1，故

$$\begin{cases} 2x = y^2 \\ x = y \end{cases} \text{或} \begin{cases} 2x = y \\ x = y^2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

结合元素的互异性， $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ 这组解要舍去，

故 $x + y = 4$ 或 $\frac{3}{4}$ ，

故答案为：4 或 $\frac{3}{4}$

第二章 函数与导数

一、选择题

1. B

【分析】 分 $f(x)$ 为一次函数和二次函数讨论，当 $a \neq 0$ 时， $f(x)$ 为二次函数，要满足在 $(-\infty, 4)$ 上为减函数，须使其开口向上，且对称轴在区间 $(-\infty, 4)$ 右侧，据此求解 a 的取值范围即可。

【详解】 当 $a = 0$ 时， $f(x) = -2x + 2$ ，满足在 $(-\infty, 4)$ 上为减函数；

当 $a \neq 0$ 时， $f(x)$ 为二次函数，

要满足在区间 $(-\infty, 4)$ 上为减函数，则 $\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{2(a-1)}{2a} \geq 4 \end{cases}$ ，解得 $0 < a \leq \frac{1}{5}$ 。

综上， a 的取值范围是 $[0, \frac{1}{5}]$ 。

故选：B.

2. C

【分析】 根据二次函数与一次函数的图像性质分 $a < 0$ ， $a > 0$ 两种情况讨论求解即可。

【详解】 解：当 $a < 0$ 时， $f(x)$ 的图像开口向下，与 y 轴交于 $(0, 1)$ 点， $g(x)$ 的图像与 y 轴交于负半轴，故A错误，C正确；

当 $a > 0$ 时， $f(x)$ 的图像开口向上，与 y 轴交于 $(0, 1)$ 点， $g(x)$ 的图像与 y 轴交于正半轴，故D错误，

又 $a > 0$ 时， $f(x)$ 图像的对称轴 $x = -\frac{1}{a}$ 在 y 轴左边，故B错误。

故选：C.

3. C

【分析】 根据一次函数和反比例函数的图象可判断出 a 、 b 、 c 的符号，再判断出二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象即可。

【详解】 由图可知， $a < 0$ 、 $b > 0$ ， $c > 0$ ，

所以，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下，排除D，由 $c > 0$ ，排除A，

对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ ，排除B，

故选：C.

4. C

【分析】 求出第 k 次倒出酒精后容器中含纯酒精的质量，然后可得第 $k+1$ 次倒出的纯酒精

的质量，然后可得倒 $k+1$ 次共倒出的纯酒精.

【详解】 ∵第 k 次时共倒出了纯酒精 x 升，

∴第 k 次倒出后容器中含纯酒精为 $(10 - x)$ 升

第 $k+1$ 次倒出的纯酒精是 $\frac{10-x}{10} \cdot 2$ 升

所以倒出第 $k+1$ 次时，共倒出了纯酒精 $f(x) = x + \frac{10-x}{10} \cdot 2 = \frac{4}{5}x + 2$

故选：C

5. D

【分析】 先由题意得到 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a}{2}$ ($a \neq 0$)对称，再根据基本初等函数的性质依次分析

判断各选项即可.

【详解】 因为存在非零的实数 a ，使得 $f(x) = f(a - x)$ 对定义域上任意的 x 恒成立，

所以 $f(x)$ 关于 $x = \frac{a}{2}$ ($a \neq 0$)对称，

对于 A、C，由一次函数与指数函数的性质可知， $f(x)$ 不存在对称轴，故 A、C 错误；

对于 B，由二次函数的性质可知 $f(x) = x^2 - 1$ 关于 $x = 0$ 对称，不符合题意，故 B 错误；

对于 D，因为 $f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x - 1)^2 - 2$ ，所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x = 1$ ，符合题意，故 D 正确.

6. A

【分析】 根据二次函数的单调性即可求解.

【详解】 $y = x^2 + (1 - a)x + 2$ 的对称轴为 $\frac{a-1}{2}$ ，故 $\frac{a-1}{2} \leq 4 \Rightarrow a \leq 9$ ，

故选：A

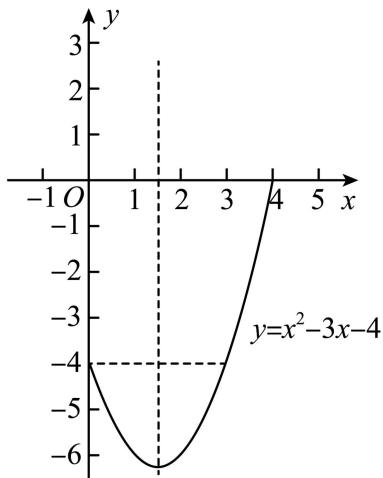
7. B

【分析】 画出二次函数图象，结合对称轴和值域可判断 m 取值范围.

【详解】 $y = x^2 - 3x - 4$ 的对称轴为 $x = \frac{3}{2}$ ，当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $y = -\frac{25}{4}$ ， $x = 0$ 时 $y = -4$ ，

故当 $y = -4$ 时，设另一根为 x_2 ，解得 $x_2 = 3$ ，要使定义域为 $[0, m]$ 时，值域为 $\left[-\frac{25}{4}, -4\right]$ ，

故 $m \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$.



故选：B

8. A

【分析】根据给定的函数，借助二次函数分段讨论其单调性作答.

【详解】当 $x \leq 2$ 时， $f(x) = -x^2 + 2x$ ，则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递增，在 $[1, 2]$ 上单调递减，

当 $x > 2$ 时， $f(x) = x^2 - 2x$ ，则函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x) = |x - 2|$ 的单调递减区间是 $[1, 2]$.

故选：A

9. D

【分析】求出二次函数图像的对称轴，由题意可得对称轴小于等于 t ，或大于等于 $t + 1$ ，从而可求出 t 的取值范围.

【详解】 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 的图像的对称轴为 $x = 1$ ，

因为函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在区间 $[t, t + 1]$ 上时单调函数，

所以 $1 \leq t$ 或 $1 \geq t + 1$ ，

得 $t \geq 1$ 或 $t \leq 0$ ，

即 t 的取值范围是 $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ，

故选：D

10. C

【分析】根据二次函数的性质即可求解.

【详解】由 $y = x^2 + (2a - 1)x + 1$ 可知是二次函数，其对称轴为 $x = -\frac{2a-1}{2}$ ，

要使得函数在 $x \in (-\infty, 2)$ 上时是减函数，则必须 $-\frac{2a-1}{2} \geq 2$ ，

即 $a \leq -\frac{3}{2}$;

故选: C.

11. A

【分析】结合图像讨论对称轴位置可得.

【详解】由题知, 当 $-\frac{-2a}{2} \leq 2$ 或 $-\frac{-2a}{2} \geq 3$, 即 $a \leq 2$ 或 $a \geq 3$ 时, 满足题意.

故选: A

12. C

【分析】由函数 $f(x) = x^2 - kx + 1$, 求得对称轴的方程为 $x = \frac{k}{2}$, 结合题意, 得到 $\frac{k}{2} \leq 2$ 或

$\frac{k}{2} \geq 5$, 即可求解.

【详解】由题意, 函数 $f(x) = x^2 - kx + 1$, 可得对称轴的方程为 $x = \frac{k}{2}$,

要使得函数 $f(x)$ 在 $[2,5]$ 上具有单调性,

所以 $\frac{k}{2} \leq 2$ 或 $\frac{k}{2} \geq 5$, 解得 $k \leq 4$ 或 $k \geq 10$.

故选: C.

13. D

【分析】根据 $ab > 0$, 可以分为 $a > 0, b > 0$ 时, 或 $a < 0, b < 0$ 时, 两种情况讨论即可.

【详解】当 $a > 0, b > 0$ 时, $y = ax + b$ 的图象不经过第四象限, $y = ax^2$ 的图象开口向上, 没有选项符合,

当 $a < 0, b < 0$ 时, $y = ax + b$ 的图象不经过第一象限, $y = ax^2$ 的图象开口向下, 只有 D 选项符合,

故选 D.

【点睛】本题主要考查了一次函数和二次函数的图象和性质, 属于基础题.

14. D

【分析】根据切点和斜率求得切线方程.

【详解】因为 $y = x + e^{2x}$, 所以 $y' = 1 + 2e^{2x}$,

则当 $x = 0$ 时, $y = 1$, $y' = 3$,

故曲线 $y = x + e^{2x}$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y - 1 = 3(x - 0)$,

即 $y = 3x + 1$.

故选: D

15. A

【分析】根据复合函数的求导法则, 即可得出答案.

【详解】由已知可得, $f'(x) = (e^{2x})' \cdot (2x)' - x' = 2e^{2x} - 1$.

故选: A.

16. B

【分析】根据基本初等函数的导数公式和导数的运算法则, 逐项求解, 即可得到答案.

【详解】A 中, 因为 $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 所以 $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)' = 0$, 故 A 错误;

B 中, 由基本初等函数的导数公式易知 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, 故 B 正确;

C 中, 因为 $\left(\frac{e^x}{2x}\right)' = \frac{2xe^x - 2e^x}{4x^2} = \frac{(x-1)e^x}{2x^2}$, 故 C 错误;

D 中, $(x \sin x)' = \sin x + x \cos x$, 故 D 错误.

故选: B.

17. D

【分析】根据导函数不同区间上函数值的符号, 判断 $f(x)$ 的区间单调性, 即可确定答案.

【详解】由图可知, 当 $x < 0$ 时 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $0 < x < 2$ 时 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递增;

当 $x > 2$ 时 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减.

结合各选项, 只有 D 符合要求.

故选: D

18. A

【分析】对 a 分类讨论, 再根据二次函数的性质分析即可.

【详解】对于 $f(x) = ax^2 + (a+6)x - 5$ 在 $(-\infty, 1)$ 单增, 若 $a = 0$, $f(x) = 6x - 5$ 是增函数, 满足题意;

若 $a \neq 0$, 则有 $\begin{cases} a < 0 \\ -\frac{a+6}{2a} \geq 1 \end{cases}$, 即 $-2 \leq a < 0$,

综上 $a \in [-2, 0]$;

故选: A.

19. C

【分析】直接根据二次函数的性质即可得出答案.

【详解】解: 函数 $y = x^2 + x + 2$ 的图象是开口向上, 且以直线 $x = -\frac{1}{2}$ 为对称轴的抛物线,

故函数 $y = x^2 + x + 2$ 的单调递减区间是 $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

故选: C.

20. A

【分析】根据二次函数性质求值域即可.

$$【详解】f(x) = \sqrt{7 + 6x - x^2} = \sqrt{-(x^2 - 6x + 9) + 16} = \sqrt{-(x - 3)^2 + 16},$$

所以 $0 \leq f(x) \leq 4$.

故选: A.

二、填空题

$$1. (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{4}, +\infty)$$

【分析】根据题意, 分 $k = 0$ 和 $k \neq 0$, 两种情况, 结合一次、二次函数的性质, 列出不等式, 即可求解.

【详解】由题意, 函数 $f(x) = kx^2 + x - 5$,

当 $k = 0$ 时, $f(x) = x - 5$, 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上为单调递增函数, 符合题意;

当 $k \neq 0$ 时, $f(x) = kx^2 + x - 5$ 的对称轴的方程为 $x = -\frac{1}{2k}$,

要使得 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上为单调函数, 则满足 $-\frac{1}{2k} \leq 1$ 或 $-\frac{1}{2k} \geq 2$,

解得 $k \leq -\frac{1}{2}$ 或 $k \geq -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$,

综上可得实数 k 的取值范围是 $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{4}, +\infty)$.

故答案为: $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [-\frac{1}{4}, +\infty)$.

$$2. g(x) = 3x^2 - 2x$$

【分析】利用待定系数法, 可得结果.

【详解】设 $g(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 由题可知

$$\begin{cases} g(1) = 1 \\ g(-1) = 5 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = 5 \\ c = 0 \end{cases}$$

所以 $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$, 则 $g(x) = 3x^2 - 2x$

故答案为: $g(x) = 3x^2 - 2x$

【点睛】本题考查函数的解析式的求法, 对这种题型, 要熟悉基本方法, 比如: 待定系数法, 换元法, 方程组法等, 属基础题.

3. -19

【分析】利用求导得出单调区间, 即可得出最值, 求出结果.

【详解】因为 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, $x \in [-3, 2]$,

$$f'(x) > 0, \quad 1 < x \leq 2 \text{ 或 } -3 \leq x < -1,$$

$$f'(x) < 0, \quad -1 < x < 1,$$

所以 $f(x)$ 在 $[-3, -1], (1, 2]$ 上单调递增, 在 $[-1, 1]$ 上单调递减.

因为 $f(-3) = -19$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -3$, $f(2) = 1$,

所以 $M = 1$, $N = -19$, 故 $MN = -19$.

故答案为: -19

4. ①④

【分析】根据已知条件及函数的部分图象, 结合二次函数的性质即可求解.

【详解】对于①, 由图象可知, 函数图象与 x 轴有两个交点,

所以 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实根,

所以 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即 $b^2 > 4ac$, 故①正确;

对于②, 因为二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $x = -1$,

所以 $-\frac{b}{2a} = -1$, 即 $2a - b = 0$, 故②错误;

对于③, 由图象可知, $f(-1) > 0$, 即 $a - b + c > 0$, 故③错误;

对于④, 由图可知, $f(0) > 0$, 即 $c > 0$.

由二次函数的对称性可知, $f(-3) = f(1) = 0$,

所以 $\begin{cases} 9a - 3b + c = 0 \text{ ⑤} \\ a + b + c = 0 \text{ ⑥} \end{cases}$,

由⑤ + ⑥, 得 $10a - 2b + 2c = 0$, 即 $5a - b = -c < 0$, 于是有 $5a < b$, 故④正确.

故答案为: ①④.

5. $\pm 2\sqrt{2}$

【分析】根据二次函数的值域列式可求出结果.

【详解】因为函数 $f(x) = x^2 - ax + 2$ 的值域是 $[0, +\infty)$,

$$\text{所以 } \frac{4 \times 1 \times 2 - (-a)^2}{4 \times 1} = 0, \text{ 解得 } a = \pm 2\sqrt{2}.$$

故答案为: $\pm 2\sqrt{2}$.

6. $(-\infty, 4]$

【分析】根据二次函数对称轴与 -4 的大小比较, 求出 a 的取值范围.

【详解】 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ 对称轴为 $x = -a$, 要想保证 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$ 在区间 $(-\infty, -4]$ 上单调递减, 则 $-a \geq -4$, 解得: $a \leq 4$

故答案为: $(-\infty, 4]$

7. $(-\infty, 1]$

【解析】首先求二次函数的对称轴, 再比较对称轴和端点值的大小.

【详解】函数 $f(x) = -x^2 + 2ax$ 是开口向下的抛物线, 并且对称轴 $x = a$,

若函数在区间 $[1, +\infty)$ 是减函数, 所以 $a \leq 1$.

故答案为: $(-\infty, 1]$.

8. $(8, 20)$

【解析】首先求函数的对称轴, 再根据条件列不等式求解.

【详解】函数 $f(x) = 2x^2 - kx - 8$ 的对称轴是 $x = \frac{k}{4}$,

因为函数在区间 $[2, 5]$ 上不单调,

所以 $2 < \frac{k}{4} < 5$, 解得: $8 < k < 20$.

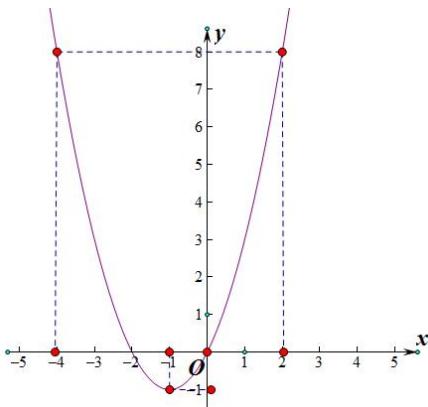
故答案为: $(8, 20)$

9. $[-1, 2]$

【分析】根据 $f(x)$ 的对称性和单调性得出 m 的范围.

【详解】解: $f(x)$ 的对称轴为直线 $x = -1$, 图象开口向上,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,



令 $f(x) = x^2 + 2x = 8$ 得 $x = 2$ 或 $x = -4$,

令 $f(x) = x^2 + 2x = -1$ 得 $x = -1$,

$\therefore f(x)$ 在 $[-4, m]$ 的值域是 $[-1, 8]$,

$\therefore -1 \leq m \leq 2$.

故答案为: $[-1, 2]$.

【点睛】本题考查了二次函数的性质, 考查二次函数的对称性、值域, 考查数形结合思想, 属于中档题.

10. $(-\infty, 2]$

【分析】求出二次函数的对称轴, 根据二次函数的单调性, 列出不等式, 即可求出实数 m 的取值范围.

【详解】函数的对称轴方程为 $x = m$

因为函数 $y = x^2 - 2mx - 7$ 在区间 $[2, +\infty)$ 单调递增

所以 $m \leq 2$.

故答案为: $(-\infty, 2]$

【点睛】本题主要考查了已知二次函数的单调性求参数的取值, 属于基础题.

11. 625

【详解】设涨价 x 元, 利润 $y = (40+x)(40-x) - 30(40-x) = -x^2 + 30x + 400$,

当 $x = -\frac{b}{2a} = 15$ 时, y 最大 = 625 (元).

故答案为 625

12. $(-\infty, 40] \cup [160, +\infty)$

【详解】函数 $f(x) = 4x^2 - kx - 8$ 在 $[5, 20]$ 上具有单调性,

$$\frac{k}{8} \geq 20 \quad \text{或} \quad \frac{k}{8} \leq 5, \text{ 即 } k \geq 160 \text{ 或 } k \leq 40$$

∴ 实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 40] \cup [160, +\infty)$

13. [1,2]

【详解】由题可知函数是开口向上，对称轴为 1 的二次函数，所以函数的最小值在对称轴取得，即 $f(1) = 2$ ，而最大值只能在区间端点值取得，因为 $f(0) = 3$ ，所以根据对称性得 $f(2) = 3$ ，所以 m 的取值范围是 $1 \leq m \leq 2$

14. [2,8]

【详解】函数对称轴为 $x = 2$ ，顶点为 $(2, -4)$ ，令 $x^2 - 4x = 32$ ，解得 $x = -4$ 或 $x = 8$ ，故 a 需从顶点横坐标开始，不能超过 8，即 $a \in [2,8]$.

15. $\frac{9}{2}$

$$f(x) = -2x^2 + 6x = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}, \quad x = \frac{3}{2}$$

【详解】试题分析：对称轴 $x = \frac{3}{2}$ 在定义域内，

所以函数的最大值为 $\frac{9}{2}$ ，故填： $\frac{9}{2}$.

考点：二次函数最值

16. [1, 2]

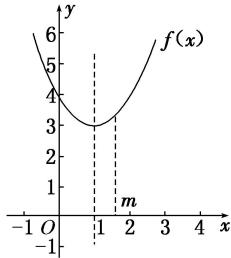
【分析】画出二次函数的图象，结合图象可得所求的范围.

【详解】由题意得 $f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3$ ，

故函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x = 1$.

令 $f(x) = x^2 - 2x + 4 = 4$ ，解得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

画出函数的图象如下图所示.



由图象可得当 $1 \leq m \leq 2$ 时，函数 $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 在区间 $[0, m]$ ($m > 0$) 上的最大值为 4，最

小值为3.

【点睛】本题考查二次函数的图象及其应用，考查数形结合在解题中的应用，其中根据 $f(x)=4$ 求得相应的 x 的值是解题的关键.

17. [3,4]

【分析】先由二次函数的开口方向，以及函数对称轴，得到函数在给定区间的单调性，进而可求出结果.

【详解】因为 $y = x^2 - 2x + 4$ 开口向上，对称轴为： $x = 1$ ，又 $x \in [0,2]$ ，

所以函数 $y = x^2 - 2x + 4$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2]$ 上单调递增；

因此 $y_{\min} = 1 - 2 + 4 = 3$ ；又当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ；当 $x = 2$ 时， $y = 4$ ；

所以 $y_{\max} = 4$. 因此函数 $y = x^2 - 2x + 4$ ， $x \in [0,2]$ 的值域为[3,4].

故答案为[3,4]

【点睛】本题主要考查求二次函数的值域，熟记二次函数的性质即可，属于常考题型.

18. $[3, + \infty)$

【分析】求出函数 $y = f(x)$ 的定义域，然后利用复合函数法可求出函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的单调递增区间.

【详解】令 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ ，解得 $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$ ，

函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的定义域为 $(-\infty, -1] \cup [3, + \infty)$.

内层函数 $u = x^2 - 2x - 3$ 的减区间为 $(-\infty, -1]$ ，增区间为 $[3, + \infty)$.

外层函数 $y = \sqrt{u}$ 在 $[0, + \infty)$ 上为增函数，

由复合函数法可知，函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ 的单调递增区间为 $[3, + \infty)$.

故答案为 $[3, + \infty)$.

【点睛】本题考查函数单调区间的求解，常用的方法有复合函数法、图象法，另外在求单调区间时，首先应求函数的定义域，考查分析问题和解决问题的能力，属于中等题.

19. $(-\infty, -3]$

【分析】根据题意分析出二次函数的对称轴 $x = -\frac{2(a-1)}{2} \geq 4$ ，由此可求出实数 a 的取值范围.

【详解】因为函数 $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上递减，

所以 $-\frac{2(a-1)}{2} \geq 4$ ，解得 $a \leq -3$.

故答案为： $(-\infty, -3]$.

20. $y = 12x - 16$

【分析】根据题意求导，求出切线的斜率，再求出切线方程即可.

【详解】由题意，得 $y' = 3x^2$ ，则在A处的切线斜率 $k = 3 \times 2^2 = 12$ ，
所以切线方程为 $y - 8 = 12(x - 2)$ ，即 $y = 12x - 16$.
故答案为： $y = 12x - 16$.

第三章 解三角形

一、选择题

1. B

【分析】由正弦定理结合 $\triangle ABC$ 中最长边为 c 求得角 B , 可得角 C , 根据勾股定理即可得答案.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, $a = 6$, $b = 6\sqrt{3}$, $A = 30^\circ$,

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

由于最长边为 c , 最大角为 C , 故角 B 为锐角, 所以 $B = 60^\circ$, 则 $C = 90^\circ$,

$$\text{故 } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12,$$

故选: B

2. C

【分析】利用正弦定理即可得解.

【详解】 \because 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 30^\circ$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$,

$$\therefore \text{由正弦定理可得 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 可得 } \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

又 $0^\circ < C < 150^\circ$,

$\therefore C = 45^\circ$ 或 135° .

故选: C.

3. C

【分析】利用正弦定理求解即可.

【详解】由正弦定理可得 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin C}$, $\therefore \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\because c > b$, $\therefore C > B$, $\because 0^\circ < C < 180^\circ$, $\therefore C = 45^\circ$ 或 135° .

故选: C.

4. B

【分析】先根据二倍角公式化简 $\cos^2 \frac{A}{2}$, 根据余弦定理化简得到 $c^2 = a^2 + b^2$ 即可得到答案.

【详解】因为 $2c \cdot \cos^2 \frac{A}{2} = b + c$,

所以 $2c \cdot \frac{1+\cos A}{2} = b + c$, 即 $c + c\cos A = b + c$,

所以 $c\cos A = b$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

代入得, $c \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = 2b^2$,

所以 $c^2 = a^2 + b^2$.

所以 $\triangle ABC$ 直角三角形.

故选: B

5. C

【分析】利用余弦定理及三角形面积公式, 再结合条件即可求出结果.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$,

所以 $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{2ab\cos C}{4}$, 即 $\sin C = \cos C$, 所以 $\tan C = 1$.

故选: C.

6. A

【分析】根据余弦定理求得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 得到 $B = \frac{\pi}{3}$, 再由 $\sin B = 2\sin A\cos C$ 结合正、余弦定理, 求得 $a^2 = c^2$, 即可求解.

【详解】由 $(a+b+c)(a+c-b) = 3ac$, 整理得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

所以 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$,

又因为 $\sin B = 2\sin A\cos C$, 即 $b = 2a \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

可得 $a^2 = c^2$, 解得 $a = c$, 又 $B = \frac{\pi}{3}$,

所以三角形 ABC 是等边三角形.

故选: A.

7. D

【分析】由题意已知条件, 直接使用三角形面积公式即可求解.

【详解】因为 $a = 2b = \sqrt{3}$, 所以 $a = \sqrt{3}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

又因为 $C = 60^\circ$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

故选: D.

8. D

【分析】由正弦边角关系可得 $2a^2 + 2b^2 = 2c^2 + 3ab$, 再应用余弦定理求 $\cos C$ 即可.

【详解】由题意 $2\sin^2 A + 2\sin^2 B = 2\sin^2(A+B) + 3\sin A \sin B = 2\sin^2 C + 3\sin A \sin B$,

$$\text{所以 } 2a^2 + 2b^2 = 2c^2 + 3ab, \text{ 得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3}{4}.$$

故选: D

9. B

【分析】利用余弦定理求解即可.

$$【\text{详解}] \text{ 由题可知 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1^2 + 3^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 1 \times 3} = -\frac{1}{2},$$

因为 $0^\circ < C < 180^\circ$, 故 $C = 120^\circ$.

故选: B.

10. D

【分析】由正弦定理, 求得 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$, 再由 $a < b$, 且 $0^\circ < B < 180^\circ$, 即可求解, 得到答案.

【详解】由题意, 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\text{即 } \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{4} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又由 $a < b$, 所以 $A < B$, 且 $30^\circ < B < 150^\circ$,

所以 $B = 60^\circ$ 或 $B = 120^\circ$,

故选: D.

11. A

【分析】直接利用余弦定理求解即可.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $a = 3$, $b = 2\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$,

所以 $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,

$$\text{即 } 12 = 9 + c^2 - 3c, \text{ 解得 } c = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \text{ 或 } \frac{3-\sqrt{21}}{2} \text{ (舍去),}$$

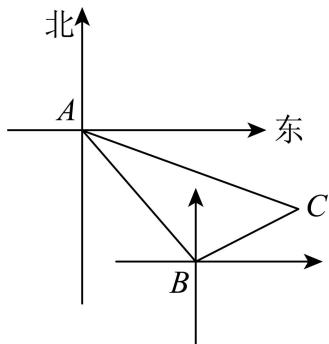
$$\text{所以 } c = \frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

故选: A.

12. A

【分析】根据给定条件, 画出图形, 再利用正弦定理解三角形作答.

【详解】依题意, 如图, 在 $\triangle ABC$ 中,



$\angle BAC = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$, $\angle ABC = 40^\circ + 65^\circ = 105^\circ$, 则 $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 40 \times \frac{30}{60} = 20$,

由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, 即 $\frac{BC}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ}$, 因此 $BC = \frac{20 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}$ (海里),

所以B、C两点间的距离是 $10\sqrt{2}$ 海里.

故选: A

13. C

【分析】由余弦定理求得 $B = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理化边为角得 $bc = a^2$, 代入另一已知得 $b = c$,

从而得三角形形状.

【详解】 $\because b^2 + c^2 = a^2 + bc$, 所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, 又 $A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,

$\therefore \sin B \sin C = \sin^2 A$, $\therefore bc = a^2$,

$b^2 + c^2 = a^2 + bc = 2bc$, $b = c$, $\therefore B = C = \frac{\pi}{3}$, 从而 $a = b = c$, $\triangle ABC$ 为等边三角形,

故选: C.

14. C

【分析】由已知结合余弦定理得出 ab 的值, 即可根据面积公式得出答案.

【详解】 $\because c^2 = (a - b)^2 + 6 = a^2 - 2ab + b^2 + 6$,

即 $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab - 6$,

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2ab - 6}{2ab} = \frac{1}{2}$,

解得: $ab = 6$,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

故选: C.

15. B

【分析】利用正弦定理和余弦定理化角为边可得答案.

【详解】因为 $2\cos C \sin B = \sin A$, 由正弦定理可得 $2b \cos C = a$,

因为 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 所以 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} = a$, 整理可得 $b = c$.

故选: B.

16. B

【分析】根据正弦定理, 结合同角的三角函数关系式、二倍角的正弦公式、正弦型函数的性质进行求解即可.

【详解】根据正弦定理, 由 $a + b = \frac{a}{\tan A} + \frac{b}{\tan B} \Rightarrow \sin A + \sin B = \frac{\sin A}{\tan A} + \frac{\sin B}{\tan B} \Rightarrow \sin A + \sin B =$

$$\frac{\sin A}{\frac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin B}{\frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B = \cos A + \cos B \Rightarrow (\sin A - \cos A)^2 = (\cos B - \sin B)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \cos^2 A - 2\sin A \cos A = \sin^2 B + \cos^2 B - 2\sin B \cos B$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2A = 1 - \sin 2B \Rightarrow \sin 2A = \sin 2B,$$

因为 $A, B \in (0, \pi)$, 所以 $2A, 2B \in (0, 2\pi)$,

所以有 $2A = 2B$, 或 $2A + 2B = \pi$, 或 $2A + 2B = 3\pi$,

当 $2A = 2B$ 时, 有 $A = B$, 此时有 $\sin A = \cos A \Rightarrow A = \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = B = \frac{\pi}{4}$,

即 $C = \frac{\pi}{2}$, 所以此时该三角形是等腰直角三角形;

当 $2A + 2B = \pi$ 时, 即 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 所以此时三角形是直角三角形;

当 $2A + 2B = 3\pi$ 时, 即 $A + B = \frac{3\pi}{2}$, 不符合三角形内角和定理, 舍去,

综上所述: $\triangle ABC$ 的形状一定是直角三角形,

故选: B

17. A

【分析】利用余弦定理将角转化为边, 然后化简可得结果.

【详解】因为 $2a \cos B = c$,

所以由余弦定理得 $2a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = c$,

所以 $a^2 + c^2 - b^2 = c^2$, 所以 $a^2 = b^2$,

因为 $a > 0, b > 0$, 所以 $a = b$,

所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

故选：A

18. C

【分析】根据余弦定理即可求解.

【详解】由余弦定理得 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bcc\cos A} = \sqrt{10}$,

故选：C

19. B

【分析】利用三角函数诱导公式和正弦定理余弦定理化简题给条件即可得到 $a = c$ ，进而得到 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

【详解】因为 $\sin B = 2\sin(B+C)\cos C$, $\sin(B+C) = \sin A$, 所以 $\sin B = 2\sin A\cos C$,

所以由正弦定理和余弦定理得 $b = 2a \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

化简得 $a^2 = c^2$, 所以 $a = c$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

故选：B

20. A

【分析】正弦定理结合二倍角公式化简得 $\sin 2A = \sin 2B$, 可得 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 即可判断 $\triangle ABC$ 的形状.

【详解】 $(a - c\cos B)\cos A = a\cos B\cos C$, 由正弦定理可得： $(\sin A - \sin C\cos B)\cos A = \sin A\cos B\cos C$,

$$\sin A\cos A = \cos B(\sin C\cos A + \sin A\cos C) = \cos B\sin B,$$

所以 $\sin 2A = \sin 2B$,

所以 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$,

即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$.

所以 $\triangle ABC$ 是等腰或直角三角形.

二、填空题

1. $\sqrt{3}$

【分析】运用正弦定理和余弦定理，将角化成边.

【详解】因为 $3\sin C\cos A = \sin B$, 由正弦定理和余弦定理有

$$3c \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = b, \text{ 整理得 } b^2 = 3(a^2 - c^2)$$

又 $a^2 - c^2 = 1$, 所以 $b^2=3$, 则 $b=\sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$

2. $\frac{3\pi}{4}$

【分析】根据题意结合余弦定理运算求解.

【详解】因为 $b = 2$, $c^2 - a^2 = 2\sqrt{2}a + 4$, 则 $c^2 - a^2 = \sqrt{2}ab + b^2$, 即 $a^2 + b^2 - c^2 = -\sqrt{2}ab$,

可得 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{-\sqrt{2}ab}{2ab} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

且 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{3\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{3\pi}{4}$.

3. 3

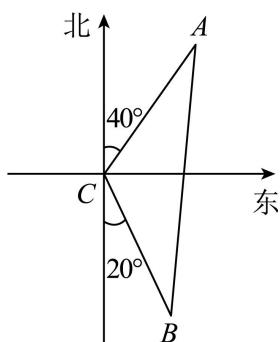
【分析】根据题意画出示意图, 利用余弦定理运算求解.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 由题意可知: $AC = BC = \sqrt{3}$, $\angle ACB = 120^\circ$,

由余弦定理可得: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB = 3 + 3 - 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 9$,

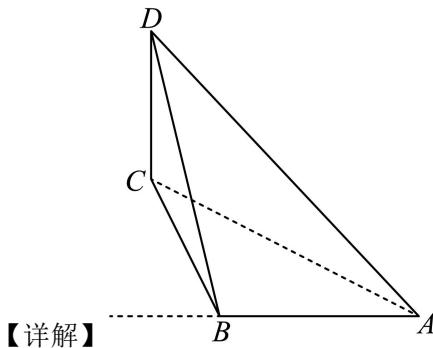
所以 $AB = 3$ (km).

故答案为: 3.



4. $400\sqrt{2}$

【分析】根据已知, 利用正弦定理以及直角三角形的性质计算求解.



【详解】

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\angle CBA = 105^\circ$ ，所以 $\angle ACB = 45^\circ$ ，

又 $AB = 800$ ，由正弦定理有： $\frac{AB}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle CAB}$ ，即 $\frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2}}$ ，

解得 $BC = 400\sqrt{2}$ ，

又 $\triangle BCD$ 是直角三角形，且 $\angle CBD = 45^\circ$ ，所以 $CD = BC = 400\sqrt{2}$ ，

所以此山的高度 $CD = 400\sqrt{2}$ m.

故答案为： $400\sqrt{2}$.

5. 2 或 4

【分析】利用余弦定理解三角形可得结论。

【详解】由余弦定理可得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$ ，

又 $\angle B = \frac{\pi}{6}$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AC = 2$ ，

所以 $BC^2 - 6BC + 8 = 0$ ，

所以 $BC = 2$ 或 $BC = 4$ ，满足构成三角形。

故答案为：2 或 4

6. $\frac{\pi}{4}/45^\circ$

【分析】利用三角形的面积公式以及余弦定理可求得 $\tan B$ 的值，结合角 B 的取值范围可求得角 B 的值。

【详解】因为 $4S = a^2 + c^2 - b^2$ ，则 $4 \times \frac{1}{2}ac \sin B = 2acc \cos B$ ，

$\because 0 < B < \pi$ ，则 $\cos B = \sin B > 0$ ，所以， $\tan B = 1$ ，解得 $B = \frac{\pi}{4}$ 。

故答案为： $\frac{\pi}{4}$ 。

7. $\sqrt{10}$

【分析】根据余弦定理，代入数据，即可得答案。

【详解】由余弦定理可得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$$\text{所以 } c = \sqrt{2 + 4 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \times \cos \frac{3}{4}\pi} = \sqrt{10}$$

故答案为: $\sqrt{10}$

$$8. 3 + \frac{\sqrt{22}}{2}$$

【分析】利用余弦定理可求得 b 的值, 即可求得 $\triangle ABC$ 的周长.

【详解】由余弦定理可得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = (a+c)^2 - 2ac(1+\cos B) = 3^2 - 2 \times \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{11}{2}$,

$$\therefore b = \frac{\sqrt{22}}{2}, \text{ 故 } \triangle ABC \text{ 的周长为 } a + b + c = 3 + \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } 3 + \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$9. \frac{\sqrt{6}}{3}/\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

【分析】根据给定条件确定最小角, 再利用正弦定理计算作答.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, $B = 45^\circ, C = 60^\circ$, 则 $A = 180^\circ - B - C = 75^\circ$, 因此, 角 B 是最小角, 边 b 是最短边,

由正弦定理得: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 又 $c = 1$, 即 $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

所以最短边的边长等于 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

10. 5

【分析】利用正弦定理及两角和正弦公式可得 $\cos B = \frac{1}{3}$, 结合面积公式可知 $ac = \frac{9}{2}$, 再利用余弦定理可得答案.

【详解】由 $b\cos C + c\cos B = 3a\cos B$,

可得 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = 3 \sin A \cos B$,

即 $\sin(B+C) = \sin A = 3 \sin A \cos B$,

又 $\sin A > 0$,

$$\therefore \cos B = \frac{1}{3}, \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{2}}{3}ac = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore ac = \frac{9}{2},$$

由余弦定理可得， $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB = a^2 + c^2 - \frac{2}{3}ac$,

$$\text{即 } 13 = (a+c)^2 - \frac{8}{3}ac = (a+c)^2 - 12,$$

$$\therefore (a+c)^2 = 25, \text{ 即 } a+c = 5.$$

故答案为：5

11. $\sqrt{13}$

【分析】直接利用余弦定理即可求得.

【详解】因为 $a=3$, $b=4$, $C=60^\circ$,

由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 得：

$$c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos 60^\circ = 13,$$

所以 $c = \sqrt{13}$.

故答案为： $\sqrt{13}$

12. $\frac{\pi}{3}$

【分析】先由正弦定理得 $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{a+b}$, 再结合题中条件得 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$, 最后利用

余弦定理可求得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 结合 $B \in (0, \pi)$ 可得 $B = \frac{\pi}{3}$.

【详解】在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理可得, $\frac{\sin C}{\sin A + \sin B} = \frac{c}{a+b}$,

$$\text{又由题知 } \frac{a-b}{a-c} = \frac{\sin C}{\sin A + \sin B}, \text{ 所以 } \frac{a-b}{a-c} = \frac{c}{a+b},$$

整理得, $b^2 = a^2 + c^2 - ac$,

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得, $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$,

$$\text{所以 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 又 } B \in (0, \pi), \text{ 所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

故答案为: $\frac{\pi}{3}$.

13. $\sqrt{7}$

【分析】由三角形面积公式求得 a , 再由余弦定理求得 b , 然后用正弦定理计算.

【详解】 $AB = 2 = c$,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a c \sin B = \frac{1}{2} \times a \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}, \text{ 解得 } a = 6,$$

所以 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 36 + 4 - 2 \times 6 \times 2 \times \frac{1}{2} = 28$, $\therefore b = 2\sqrt{7}$,

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} = \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}.$$

故答案为: $\sqrt{7}$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【分析】根据余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ 求得 c 的值; 由三角形面积公式 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B$ 求其面积.

【详解】由余弦定理知: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$,

$$\text{即 } 7 = 1 + c^2 - 2 \times c \cdot \cos 120^\circ = c^2 + c + 1, \text{ 即 } (c - 2)(c + 3) = 0,$$

故 $c = 2$ 或 $c = -3$ (舍去).

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故答案是: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

【分析】根据面积公式, 可求得 $\sin A$ 的值, 根据角 A 的范围, 即可求得答案.

【详解】由题意得 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} \times \sin A = \frac{3}{2}$,

$$\text{解得 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } A \in (0, \pi),$$

所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

16. $\frac{2\pi}{3}$

【分析】利用正弦定理角化边, 然后利用余弦定理求最大角.

【详解】因为 $\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$, 所以由正弦定理, 得 $a : b : c = 7 : 8 : 13$,
设 $a = 7k, b = 8k, c = 13k$,

$$\text{所以由余弦定理, 得 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2 \times 7k \times 8k} = -\frac{1}{2},$$

所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{2\pi}{3}$.

17. 0

【分析】由余弦定理化简求值.

【详解】 $\because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2ac \cos 120^\circ = a^2 + c^2 + ac$, $\therefore a^2 + c^2 + ac - b^2 = 0$.

故答案为: 0

18. $\frac{3}{4}$

【分析】由余弦定理计算.

【详解】因为 $b^2 = ac$, 且 $c = 2a$, $b^2 = 2a^2$, 所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 4a^2 - 2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{4}$.

19. $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

【解析】首先根据题意得到 $\angle A = 30^\circ$, 再利用正弦定理即可得到答案.

【详解】因为 $\angle B = \angle C = 75^\circ$, 所以 $\angle A = 180^\circ - 75^\circ - 75^\circ = 30^\circ$,

所以 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{AB}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$, 解得 $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

20. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【解析】利用余弦定理结合基本不等式求解即可.

【详解】根据题意, 由 $a^2 + 2b^2 = 3c^2$ 得: $c^2 = \frac{a^2 + 2b^2}{3}$

由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 - \frac{a^2 + 2b^2}{3}}{2ab} = \frac{2a^2 + b^2}{6ab} \geq \frac{2\sqrt{2}ab}{6ab} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

当且仅当 $2a^2 = b^2$, 即 $b = \sqrt{2}a$ 时取等号

故答案为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

【点睛】本题主要考查了余弦定理的应用以及基本不等式的应用, 属于中档题.

第四章 数列

一、选择题

1. B

【分析】首先把已知条件表示为两个基本量首项 a_1 与公差 d 的关系式，进而求出基本量，要使得 S_n 最大，只需把前面有限项符号为正的那些项相加即可。

【详解】设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ ，前 n 项的和公式为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ，

则由题意有 $2a_3 - a_5 = 2(a_1 + 2d) - (a_1 + 4d) = 7$, $a_2 + S_7 = (a_1 + d) + \left(7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d\right) = (a_1 + d) + (7a_1 + 21d) = 12$,

由以上两式解得 $a_1 = 7$, $d = -2$ ，因此 $a_n = 7 - 2(n - 1) = 9 - 2n$,

令 $a_n = 7 - 2(n - 1) = 9 - 2n \geq 0$, 解得 $1 \leq n \leq 4$,

从而数列得前4项为正，其余项为负，故 S_n 的最大值为 $S_4 = 4 \times 7 + \frac{4 \times 3}{2} \times (-2) = 16$.

故选：B.

2. A

【分析】根据等比数列的性质即可求解。

【详解】由于 $a_1 = 1$, $a_5 = 81$ 可得 $a_1 = 1$, $a_5 = 81 = a_1 q^4 \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q^2 = 9$, 所以 $a_3 = a_1 q^2 = 9$,

故选：A

3. D

【分析】利用等比中项的含义可求答案。

【详解】因为 $a_5^2 = a_4 a_6 = 4$, 所以 $a_5 = \pm 2$.

故选：D.

4. A

【分析】根据题意，设该等比数列的公比为 q ，分析可得 $q^4 = \frac{16}{1} = 16$ ，变形可得 q^2 的值，进而求出 $b = 4$ ，以及 $ac = b^2 = 16$ ，进而计算可得答案。

【详解】根据题意，若 $1, a, b, c, 16$ 成等比数列，设其公比为 q ，

则有 $q^4 = \frac{16}{1} = 16$ ，变形可得 $q^2 = 4$ ，则 $b = 1 \times q^2 = 4$ ，

又由 $ac = b^2 = 16$, 则 $abc = 16 \times 4 = 64$.

故选: A.

5. D

【分析】根据等差数列基本量的计算即可求解.

【详解】 $S_5 = 20 = 5a_1 + 10d$, $a_2 = 5 = a_1 + d$, 解得 $a_1 = 6, d = -1$,

故选: D

6. B

【分析】根据定义法判断等差数列, 写出其通项公式后直接求解即可.

【详解】由题意知, $\{a_n\}$ 是首项为 -2 , 公差为 1 的等差数列,

所以 $a_n = (-2) + (n - 1) \times 1 = n - 3$,

则 $a_{25} = 25 - 3 = 22$.

故选: B

7. A

【分析】根据题意, 由等差数列与等比数列的定义, 分别验证充分性以及必要性, 即可得到结果.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 $a_1 \neq 0$,

若 $q = 2$, 则 $4a_1, a_3 = a_1 \cdot q^2 = 4a_1, 2a_2 = 2a_1 \cdot q = 4a_1$ 为常数数列, 且为等差数列,

所以充分性满足;

若 $4a_1, a_3, 2a_2$ 成等差数列, 由等差中项的性质可得, $2a_3 = 4a_1 + 2a_2$, 化简可得,

$2a_1q^2 = 4a_1 + 2a_1q$, 且 $a_1 \neq 0$, 则 $q^2 - q - 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = -1$, 所以必要性不满足;

所以 “ $q = 2$ 是 “ $4a_1, a_3, 2a_2$ 成等差数列” 的充分不必要条件.

故选: A

8. C

【分析】根据已知列出方程组, 求解即可得出答案.

【详解】设公差为 d ,

由已知可得, $\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 2 \\ S_6 = 6a_1 + 15d = 48 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 4 \end{cases}$.

故选: C.

9. D

【分析】首先由前 3 项的和为 7, 得出 $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7$, 再由前 3 项的积为 8, 根据下标和定理得出 $a_2 = 2$, 则 $a_1 = \frac{2}{q}$ 代入求值, 结合 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列, 得出 q 的值, 根据等比

数列通项公式即可得出 a_4 .

【详解】由前 3 项的和为 7, 得 $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7$

前 3 项的积为 8, 得 $a_1a_2a_3 = a_2^3 = 8$, 即 $a_2 = 2$,

则 $a_1 = \frac{2}{q}$, 代入 $a_1 + a_1q + a_1q^2 = 7$, 得 $\frac{2}{q} + \frac{2}{q} \cdot q + \frac{2}{q} \cdot q^2 = 7$, 即 $2q^2 - 5q + 2 = 0$, 解得 $q = 2$

或 $q = \frac{1}{2}$,

因为 $\{a_n\}$ 为递增的等比数列,

所以 $q = 2$, 则 $a_1 = \frac{2}{q} = 1$,

所以 $a_4 = 1 \times 2^3 = 8$,

故选: D.

10. D

【分析】根据 $\{a_n\}$ 是等差数列, 先求出公差 d , 然后由等差数列的通项公式即可求出结果.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d = \frac{a_{2023} - a_{100}}{2023 - 100} = -1$,

所以 $a_{2123} = a_{100} + (2123 - 100)d = 2023 - 2023 = 0$,

故选: D.

11. C

【分析】用 S_n 与 a_n 的关系, 求出 $\{a_n\}$ 通项公式, 根据等比数列的定义, 即可判断正误.

【详解】对于 A, 已知 $S_n = 2^n + 2$, 所以 $S_{n+1} = 2^{n+1} + 2$, $a_1 = S_1 = 2^1 + 2 = 4$

所以 $S_{n+1} - S_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$, $a_{n+1} = 2^n$, $a_n = 2^{n-1}$,

$\because a_1 = 4$, 不符合上式, A 选项错误;

对于 B, 已知 $a_{n+1} = 2a_n$, 当首项为零时, 不符合题意, B 选项错误;

对于 C, 已知 $S_n = 2a_n - 1$, 所以 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$, $a_1 = S_1 = 2a_1 - 1 \Rightarrow a_1 = 1$

则 $S_{n+1} - S_n = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n$, $a_{n+1} = 2a_n$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$,

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, C 选项正确;

对于 D, 已知 $\{S_n\}$ 是等比数列, 则设 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot q^{n-1}$

则 $S_{n+1} - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n-1}$, $a_{n+1} = a_1(q - 1) \cdot q^{n-1}$, $a_n = a_1(q - 1) \cdot q^{n-2}$,

不符合等比数列的通项公式, D 选项错误;

故选: C.

12. C

【分析】举特例结合等差数列的性质，即可得出答案。

【详解】设 $a_n = (-1)^n \cdot n$ ，则 $a_3 = -3$, $a_5 = -5$, $a_7 = -7$ ，所以 $a_3 + a_7 = -10 = 2a_5$ ，但数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列；

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，根据等差数列的性质可知， $a_3 + a_7 = 2a_5$ 成立。

所以，“ $a_3 + a_7 = 2a_5$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”的必要不充分条件。

故选：C.

13. A

【分析】根据等比中项性质进行计算即可。

【详解】 $a_1 a_5 = a_3^2 = 5$ ，得 $a_3 = \pm \sqrt{5}$ ，

因为 a_1 、 a_3 、 a_5 都为奇数项，在等比数列中应该为同号，所以 $a_3 = \sqrt{5}$ ，

故 $a_2 a_3 a_4 = a_3^3 = 5\sqrt{5}$ 。

故选：A.

14. C

【分析】根据等差数列等差中项的性质可得公差，进而确定通项及 a_{10} 。

【详解】由 $a_1 + a_3 + a_5 = 105$, $a_2 + a_4 + a_6 = 99$,

可得 $3a_3 = 105$, $3a_4 = 99$ ，则 $a_3 = 35$, $a_4 = 33$ ，

所以 $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_4 = a_1 + 3d \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a_1 = 39 \\ d = -2 \end{cases}$ ，

所以 $a_n = a_1 + (n - 1)d = 39 + (n - 1) \cdot (-2) = 41 - 2n$ ，

所以 $a_{10} = 41 - 2 \times 10 = 21$ ，

故选：C.

15. D

【分析】分别令选项中的数等于 $n^2 + 2n$ ，解得 n 值是正整数的即为答案。

【详解】令 $a_n = n^2 + 2n = 10$ ，可得 $n = -1 \pm \sqrt{11}$ ，

$n = -1 - \sqrt{11} < 0$, $n = -1 + \sqrt{11}$ 不是正整数，

所以 10 不是 $\{a_n\}$ 的项；A 错误；

令 $a_n = n^2 + 2n = 18$ ，可得 $n = -1 \pm \sqrt{19}$ ，

$n = -1 - \sqrt{19} < 0$, $n = -1 + \sqrt{19}$ 不是正整数，

所以 18 不是 $\{a_n\}$ 的项；B 错误；

令 $a_n = n^2 + 2n = 26$ ，可得 $n = -1 \pm 3\sqrt{3}$ ，

$n = -1 - 3\sqrt{3} < 0$, $n = -1 + 3\sqrt{3}$ 不是正整数，

所以 26 不是 $\{a_n\}$ 的项；C 错误；

令 $a_n = n^2 + 2n = 63$, 可得 $n = -9$ 或 $n = 7$,

$n = -9 < 0$, $n = 7$ 是正整数,

即数列 $\{a_n\}$ 的第 7 项为 63, D 正确;

故选: D.

16. B

【分析】根据条件, 列出关于公比的方程, 即可求解.

【详解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$, 首项 $a_1 > 0$,

由 $2a_1, \frac{1}{2}a_3, a_2$ 成等差数列, 则 $a_3 = 2a_1 + a_2$,

则 $a_1q^2 = 2a_1 + a_1q$, $q^2 - q - 2 = 0$, 得 $q = -1$ (舍) 或 $q = 2$.

故选: B

17. B

【分析】利用等差数列的通项公式及求和公式列方程组求出首项和公差, 然后再求 S_8 即可.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由已知得 $\begin{cases} a_2 + a_9 = a_1 + d + a_1 + 8d = 29 \\ S_5 = 5a_1 + 10d = 35 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$,

$\therefore S_8 = 8a_1 + 28d = 8 + 28 \times 3 = 92$.

故选: B.

18. A

【分析】运用等差数列通项公式及等差数列前 n 项和公式的基本量计算即可.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$\because 3S_3 = S_2 + S_4$, $a_1 = 2$,

$\therefore 3 \times (3 \times 2 + 3d) = 2 \times 2 + d + 4 \times 2 + \frac{4 \times 3}{2}d$, 解得: $d = -3$,

$\therefore a_6 = 2 + 5 \times (-3) = -13$.

故选: A.

19. D

【分析】由题意根据等差中项的性质判断数列为等差数列, 利用等差数列前 n 项和片段和的性质即可求得答案.

【详解】由 $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ 可得 $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$,

故数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

又 $S_{10} = 20, S_{20} = 10$, 故 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 也成等差数列,

即 $2 \times (10 - 20) = 20 + S_{30} - 10, \therefore S_{30} = -30$,

故选: D

20. D

【分析】由求和公式得出 a_1 .

【详解】由题意, 得 $S_{13} = \frac{13(a_1+a_{13})}{2} = \frac{13(a_1+13)}{2} = 13$, 解得 $a_1 = -11$.

故选: D

二、填空题

1. 55

【分析】由已知每年收入都是上一年的 1.02 倍, 可得每年收入是以 5 为首相, 公比为 1.02 的等比数列, 求和即可.

【详解】由已知每年收入都是上一年的 1.02 倍, 可得每年收入是以 5 为首相, 公比为 1.02 的等比数列,

所以甲工作 10 年的总收入约为 $S = \frac{5(1-1.02^{10})}{1-1.02} \approx 55$ 万元.

故答案为: 55.

2. $\frac{7}{13}$

【分析】根据题意, 利用等差数列前 n 项和公式, 化简比例式 $\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{2a_{10}}{2b_{10}} = \frac{a_1+a_{19}}{b_1+b_{19}} = \frac{\frac{19}{2}(a_1+a_{19})}{\frac{19}{2}(b_1+b_{19})} = \frac{S_{19}}{T_{19}}$, 代入即可求解.

【详解】因为 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n+2}{2n+1}$,

所以 $\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{2a_{10}}{2b_{10}} = \frac{a_1+a_{19}}{b_1+b_{19}} = \frac{\frac{19}{2}(a_1+a_{19})}{\frac{19}{2}(b_1+b_{19})}$

$= \frac{S_{19}}{T_{19}} = \frac{19+2}{2 \times 19+1} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}$.

故答案为: $\frac{7}{13}$

3. 504

【分析】根据等比数列求和公式求出 a_1 , 即可得解.

【详解】因为 $S_8 - 5S_7 = \frac{a_1(1-5^8)}{1-5} - \frac{5a_1(1-5^7)}{1-5} = \frac{a_1(1-5^8)-a_1(5-5^8)}{1-5} = a_1 = 4$,

所以 $a_1 + a_4 = 4 + 4 \times 5^3 = 504$.

故答案为: 504

4. 16 或 -20

【分析】根据等比数列通项公式表示出前三项和解出公比, 将公比代入数列前四项的和计算即可.

【详解】设等比数列公比为 q , $a_n = 4 \cdot q^{n-1}$,

$S_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = 12 \Rightarrow q^2 + q + 1 = 3$, 化简可得 $(q - 1)(q + 2) = 0$, 解得 $q = 1$ 或 $q = -2$,

当 $q = 1$ 时, $a_n = 4$, $S_4 = S_3 + a_4 = 12 + 4 = 16$,

当 $q = -2$ 时, $a_n = 4 \times (-2)^{n-1} \Rightarrow a_4 = -32$, $S_4 = S_3 + a_4 = 12 - 32 = -20$.

故答案为: 16 或 -20

5. 8

【分析】根据等比数列的性质, 推得 $a_4^2 + a_8^2 = 16$, 再结合基本不等式即可求解.

【详解】各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中,

由 $a_2a_6 + a_5a_{11} = 16$, 则 $a_4^2 + a_8^2 = 16$,

所以 $a_4a_8 \leq \frac{a_4^2 + a_8^2}{2} = 8$, 当且仅当 $a_4 = a_8 = 2\sqrt{2}$ 时等号成立,

故 a_4a_8 的最大值为 8.

故答案为: 8.

6. -5

【分析】根据递推公式计算可得.

【详解】因为 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - n$,

所以 $a_2 - a_1 = -1$, $a_3 - a_2 = -2$, $a_4 - a_3 = -3$,

累加可得 $a_4 - a_1 = -1 - 2 - 3 = -6$, 解得 $a_4 = -5$.

故答案为: -5.

7. 8192

【分析】利用等差数列的性质和等比数列的性质求解.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_3 + a_{11} = 2a_7$,

所以 $2a_7 - a_7^2 = 0$, 解得 $a_7 = 0$ 或 $a_7 = 2$,

又因为等比数列的 $b_7 = a_7$, 所以 $a_7 \neq 0$, 所以 $b_7 = a_7 = 2$,

所以 $b_1 \cdot b_2 \cdots \cdot b_{13} = (b_1 \cdot b_{13}) \cdot (b_2 \cdot b_{12}) \cdots \cdots \cdot b_7 = b_7^{13} = 2^{13} = 8192$,

故答案为: 8192.

8. 35

【分析】根据给定条件，利用等差数列性质结合前 n 项和公式求解作答。

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1 + a_{14} = a_7 + a_8 = 5$ ，所以 $S_{14} = \frac{14(a_1 + a_{14})}{2} = 35$ 。

故答案为：35

9. $\frac{1}{4}/0.25$

【分析】利用等比数列的通项公式计算即可。

【详解】 $\because \{a_n\}$ 是公比为2的等比数列，

$$\therefore \frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} = \frac{a_1 + 2a_1}{4a_1 + 8a_1} = \frac{3a_1}{12a_1} = \frac{1}{4}$$

故答案为： $\frac{1}{4}$

10. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ (或 $a_n = \frac{n(n+1)}{2} \cos n \pi$ ，或分段函数，满足条件均可)

【分析】由前4项的规律，即可写出数列的一个通项公式。

【详解】 $\because a_1 = (-1)^1 \times \frac{1 \times 2}{2} = -1, a_2 = (-1)^2 \times \frac{2 \times 3}{2} = 3,$

$$a_3 = (-1)^3 \times \frac{3 \times 4}{2} = -6, a_4 = (-1)^4 \times \frac{4 \times 5}{2} = 10,$$

$$\therefore a_n = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

故答案为： $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ 。

11. 15

【分析】根据等差数列前 n 项和公式求解即可。

【详解】因为 $a_7 + a_9 = 2$ ，

$$\text{所以} S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = \frac{15(a_7 + a_9)}{2} = \frac{15 \times 2}{2} = 15.$$

故答案为：15

12. 25

【分析】根据给定条件，求出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差，进而求出第5项即可计算作答。

【详解】等差数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_1 + a_3 = 6, a_2 + a_4 = 10$ 得： $2a_2 = 6, 2a_3 = 10$ ，即有 $a_2 = 3, a_3 = 5$ ，

因此数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_3 - a_2 = 2, a_5 = a_3 + 2d = 9$ ，

所以 $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 6 + 10 + 9 = 25$ 。

故答案为: 25

13. 9

【分析】根据递推公式求出数列 $\{a_n\}$ 的前几项, 观察可得, 数列 $\{a_n\}$ 的周期 $T = 6$. 根据周期性即可得出答案.

【详解】由已知当 $n = 1$ 时, 有 $a_3 = a_2 - a_1 = 9 - 3 = 6$,

依次可求出 $a_4 = -3$, $a_5 = -9$, $a_6 = -6$, $a_7 = 3$, $a_8 = 9$.

经过观察可得, 数列 $\{a_n\}$ 具有周期性, 其周期 $T = 6$.

又 $308 = 51 \times 6 + 2$, 所以 $a_{308} = a_2 = 9$.

故答案为: 9.

$$14. \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$$

【分析】根据 $S_n = n^2 + n + 1$ 求得 $a_1 = 3$, 当 $n \geq 2$ 时, 利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求得 a_n 的表达式, 验证首项是否适合, 即可得答案.

【详解】由题意数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + n + 1$, 则 $a_1 = S_1 = 3$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n + 1 - (n-1)^2 - (n-1) - 1 = 2n$,

$a_1 = 3$ 不适合上式,

$$\text{故}\{a_n\}\text{的通项公式 } a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases},$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} 3, & n = 1 \\ 2n, & n \geq 2 \end{cases}$$

15. 108

【分析】方法 1: 由等差数列的等和性以及等差数列的前 n 项和公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 可得结果.

方法 2: 由等差数列的通项公式以及等差数列前 n 项和公式(基本量)可得结果.

【详解】方法 1: $\because \{a_n\}$ 为等差数列,

$$\therefore a_1 + a_4 + a_7 = 3a_4 = 39, \quad a_3 + a_6 + a_9 = 3a_6 = 33,$$

$$\therefore a_4 = 13, \quad a_6 = 11,$$

$$\therefore S_9 = \frac{9(a_1+a_9)}{2} = \frac{9(a_4+a_6)}{2} = \frac{9 \times (13+11)}{2} = 108,$$

方法 2: $\because \{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d ,

$$\begin{cases} a_1 + a_4 + a_7 = a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 6d = 39 \\ a_3 + a_6 + a_9 = a_1 + 2d + a_1 + 5d + a_1 + 8d = 33 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a_1 = 16 \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\therefore S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times 8}{2}d = 9 \times 16 + \frac{9 \times 8}{2} \times (-1) = 108$$

故答案为：108.

16. 9

【分析】根据等差数列的性质求出 $a_1 = 1$, 再根据其通项即可得出 a_5 .

【详解】解：等差数列 $\{a_n\}$ 中， $S_3 = a_5$, $a_2 - a_1 = 2$,

所以 $3a_2 = a_5$, 且 $d = 2$,

即 $3a_1 + 3d = a_1 + 4d$,

所以 $2a_1 = d$,

解得 $a_1 = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 2 = 1$,

所以 $a_5 = a_1 + 4d = 1 + 4 \times 2 = 9$,

故答案为：9.

17. $(-2, +\infty)$

【分析】先由 S_n 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \begin{cases} 1+m, & n=1 \\ -2n+3, & n \geq 2 \end{cases}$, 根据通项公式可知, 当 $n \geq 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 递减, 因此只需使 $a_2 < a_1$ 即可.

【详解】①当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = -1^2 + 2 + m = 1 + m$,

②当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + 2n + m - [-(n-1)^2 + 2(n-1) + m] = -2n + 3$,
 $a_{n+1} - a_n = [-2(n+1) + 3] - (-2n + 3) = -2 < 0$

\therefore 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} < a_n$, 数列 $\{a_n\}$ 递减,

综上所述, 若使 $\{a_n\}$ 为递减数列, 只需满足 $a_2 < a_1$, 即 $-2 \times 2 + 3 < 1 + m$,

解得 $m > -2$,

故答案为: $(-2, +\infty)$.

18. 2

【分析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 根据等比数列的前 n 项和公式, 即可求出公比 q , 再根据等比数列的性质可知 $\frac{a_2+a_5}{a_1+a_4} = q$, 由此即可求出结果.

【详解】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

当 $q = 1$ 时, $S_3 = 14$, $a_1 = 2$ 不能同时成立;

当 $q \neq 1$ 时, 因为 S_n 为正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_3 = 14$, $a_1 = 2$,

所以 $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 14$, 即 $\frac{(1-q)(1+q^2+q)}{1-q} = 7$

所以 $q^2 + q + 1 = 7$, 所以 $q = 2$ ($q = -3$ (舍去)),

又 $\frac{a_2+a_5}{a_1+a_4} = \frac{(a_1+a_4)q}{a_1+a_4} = q$, 所以 $\frac{a_2+a_5}{a_1+a_4}$ 的值为2.

故答案为：2.

19. 50

【分析】由等差数列片段和的性质知 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列，再由等差中项的性质求结果。

【详解】由题设 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等差数列，

所以 $2(S_{20} - S_{10}) = S_{10} + S_{30} - S_{20}$ ，则 $3S_{20} = 3S_{10} + S_{30} = 150$ ，

所以 $S_{20} = 50$.

故答案为：50

$$20. \quad a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 6n - 5, & n \geq 2 \end{cases}$$

【分析】利用 a_n 与 S_n 关系即得。

【详解】因为 $S_n = 3n^2 - 2n + 1$ ，

当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 3 - 2 + 1 = 2$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 2n + 1 - [3(n-1)^2 - 2(n-1) + 1] = 6n - 5$ ，

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 6n - 5, & n \geq 2 \end{cases}.$$

$$\text{故答案为: } a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 6n - 5, & n \geq 2 \end{cases}.$$

第五章 不等式

一、选择题

1. C

【分析】根据 $x > 0$ 与 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ 之间的推出关系判断.

【详解】 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ 能推出 $x > 0$, 故必要性成立,

当 $x > 0$ 时, 取 $x = 1$, 则 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, 不能推出 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$, 故充分性不成立,

所以“ $x > 0$ ”是“ $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} > 2$ ”的必要不充分条件,

故选: C.

2. B

【分析】根据已知条件利用基本不等式直接得出 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, 再结合 $0 < a < b$ 可得出结果.

【详解】由已知 $0 < a < b$, 利用基本不等式得出 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$,

因为 $0 < a < b$, 则 $a^2 < ab < b^2$, $a + b < 2b$,

所以 $a < \sqrt{ab} < b$, $\frac{a+b}{2} < b$,

$\therefore a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

故选: B

3. C

【分析】先根据条件可知 $\Delta \geq 0$, 再结合韦达定理即可建立等量关系, 即可得解.

【详解】 \because 关于 x 的方程 $x^2 + (2k - 1)x + k^2 - 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ,

$\therefore \Delta = (2k - 1)^2 - 4(k^2 - 1) = -4k + 5 \geq 0$, 解得 $k \leq \frac{5}{4}$,

\therefore 实数 k 的取值范围为 $k \leq \frac{5}{4}$,

根据韦达定理可得 $x_1 + x_2 = 1 - 2k$, $x_1 x_2 = k^2 - 1$,

$\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 16 + x_1 x_2$,

$\therefore (1 - 2k)^2 - 2(k^2 - 1) = 16 + (k^2 - 1)$, 即 $k^2 - 4k - 12 = 0$,

解得 $k = -2$ 或 $k = 6$ (不符合题意, 舍去),

\therefore 实数 k 的值为 -2.

故选: C.

4. D

【分析】举反例排除 ABC; 利用作差法即可判断 D.

【详解】A 选项, 当 $c = 0$ 时, $ac^2 = bc^2$, 故 A 错误;

B 选项, 当 $a = 1$, $b = 0$, $c = -2$, $d = -1$ 时, $\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$, $\frac{b}{d} = 0$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, 故 B 错误;

C 选项, 当 $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$ 时, $a - c = b - d$, 故 C 错误;

D 选项, 若 $ab > 0$, $a > b$, 则 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$, 即 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 故 D 正确.

故选: D.

5. D

【分析】根据三个二次之间的关系结合韦达定理可得 $\begin{cases} b = a \\ c = -2a \end{cases}$, 且 $a < 0$, 代入所求不等式运算求解即可.

【详解】由题意可得: $ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 -2, 1, 且 $a < 0$,

$$\text{可得} \begin{cases} -\frac{b}{a} = -1 \\ \frac{c}{a} = -2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = a \\ c = -2a \end{cases},$$

则不等式 $a(x^2 + 1) + b(x + 1) + c < 3ax$, 即为 $a(x^2 + 1) + a(x + 1) - 2a < 3ax$,

且 $a < 0$, 则 $(x^2 + 1) + (x + 1) - 2 > 3x$, 整理得 $x^2 - 2x > 0$,

解得 $x < 0$ 或 $x > 2$, 即解集为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

故选: D.

6. C

【分析】解出集合 A, B , 根据交集含义即可得到答案.

【详解】由题意得 $A = (-2, 3)$, $B = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

$$\text{则 } A \cap B = \left(-\frac{3}{2}, 3\right),$$

故选: C.

7. D

【分析】举例说明选项 ABC 错误; 利用作差法证明选项 D 正确.

【详解】对于 A, 当 $c = 0$, $a = -1$, $b = 2$ 时满足 $ac^2 \geq bc^2$, 但 $a < b$, 所以 A 错误;

对于 B, 当 $c = -1$, $a = -2$, $b = -3$ 时, 满足 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$, 但 $a > b$, 所以 B 错误;

对于 C, 由不等式的基本性质易知 $a + c > 0$, 当 $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 2$ 时满足 $a + b > 0$, $c - b > 0$, 但 $a < c$, 所以 C 错误;

对于 D, $\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{(a+m)b - a(b+m)}{(b+m)b} = \frac{(b-a)m}{(b+m)b} > 0$, 所以 $\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$, 故 D 正确.

故选: D.

8. B

【分析】根据等比数列的性质得 $a_4^2 + a_8^2 = 16$, 再结合基本不等式即可求解.

【详解】各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中,

由 $a_2 a_6 + a_5 a_{11} = 16$, 则 $a_4^2 + a_8^2 = 16$,

所以 $a_4 a_8 \leq \frac{a_4^2 + a_8^2}{2} = 8$, 当且仅当 $a_4 = a_8 = 2\sqrt{2}$ 时等号成立,

故 $a_4 a_8$ 的最大值为 8.

故选: B.

9. D

【分析】由 $\frac{1}{2x} > 1$ 得 $0 < x < \frac{1}{2}$, 再根据充分不必要条件判断即可.

【详解】由 $\frac{1}{2x} > 1$ 得, $\frac{1-2x}{2x} > 0$, 即 $2x(2x-1) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$,

所以, 使 “ $\frac{1}{2x} > 1$ ” 成立的一个充分不必要条件可以是 $(0, \frac{1}{2})$ 的子集,

所以, 由各选项可知 “ $0 < x < \frac{1}{4}$ ” 满足题意,

所以, 使 “ $\frac{1}{2x} > 1$ ” 成立的一个充分不必要条件可以是 “ $0 < x < \frac{1}{4}$ ” .

故选: D.

10. C

【分析】解一元二次不等式, 求出答案.

【详解】 $x^2 - 5x - 6 > 0$, 解得: $(x-6)(x+1) > 0$, 解得: $x > 6$ 或 $x < -1$.

故选: C

11. D

【分析】根据扇形面积公式及其基本不等式求出扇形面积取得最大值时的扇形半径和弧长, 利用弧度数公式即可求出圆心角.

【详解】设扇形的半径为 r , 弧长为 l , 由已知得 $2r + l = 8$,

扇形面积为 $S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}(8 - 2r)r = (4 - r)r \leq \frac{[(4-r)+r]^2}{4} = 4$,

当且仅当 $4 - r = r$, 即 $r = 2$ 时等号成立, 此时 $l = 4$, 则圆心角 $\alpha = \frac{l}{r} = 2$,

故选: D.

12. B

【分析】由题意知 $\frac{8a+b}{5} = 1$, 用基本不等式中“1”的代换求 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值.

【详解】由题意知 $b = -8a + 5$, 且 $a > 0, b > 0$, 故 $\frac{8a+b}{5} = 1$,

从而 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{8a+b}{5} = \frac{1}{5} \left(17 + \frac{2b}{a} + \frac{8a}{b}\right) \geq \frac{1}{5} \left(17 + 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{8a}{b}}\right) = 5$, 当且仅当 $b = 2a = 1$

时, 等号成立.

故选: B

13. A

【分析】对 k 进行分类讨论, 当 $k = 0$ 时不等式恒成立, $k \neq 0$ 时不等式恒成立, 需要 $k > 0$ 时且 $\Delta \leq 0$, 可求得 k 的范围.

【详解】当 $k = 0$ 时, 不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 化为 $8 \geq 0$ 恒成立,

当 $k \neq 0$ 时, 要使不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 恒成立, 需 $\begin{cases} k > 0 \\ \Delta = 36k^2 - 4(k^2 + 8k) \leq 0 \end{cases}$,

解得 $0 < k \leq 1$,

综上可得, 不等式 $kx^2 - 6kx + k + 8 \geq 0$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 $[0, 1]$.

故选: A.

14. A

【分析】根据基本不等式可得 $ab - 2\sqrt{ab} - 3 \geq 0$, 解出 $\sqrt{ab} \geq 3$, 即可得出答案.

【详解】因为 $a, b > 0$, 所以有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a = b$ 时, 等号成立.

又 $ab = a + b + 3$, 所以有 $ab = a + b + 3 \geq 2\sqrt{ab} + 3$, 整理可得 $ab - 2\sqrt{ab} - 3 \geq 0$,

解得 $\sqrt{ab} \geq 3$ 或 $\sqrt{ab} \leq -1$ (舍去).

所以 $\sqrt{ab} \geq 3$, 所以 $ab \geq 9$. 所以当 $a = b = 3$ 时, ab 有最小值 9.

故选: A.

15. B

【分析】对于 A 选项, 取特殊值否定 A 错误;

对于 B 选项, 根据不等式两边同乘正数不变号, 可证明 B 正确;

对于 C 选项, 可以证明只有 $a > b$ 时不等式成立, C 错误;

对于 D 选项，取特殊值否定 D 错误。

【详解】对于 A 选项， $3 > -2$ ，则 $\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$ ，故 A 错误；

对于 B 选项，若 $ac^2 > bc^2$ ，则 $c^2 \neq 0$ ，所以 $ac^2 \cdot \frac{1}{c^2} > bc^2 \cdot \frac{1}{c^2}$ 即 $a > b$ ，故 B 正确；

对于 C 选项，若 $a, b, m \in (0, +\infty)$ ，则 $\frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{(b+m)a - b(a+m)}{a(a+m)} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)}$ ，

只有当 $a > b$ 时， $\frac{m(a-b)}{a(a+m)} > 0$ 即 $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$ 成立，故 C 错误；

对于 D 选项，若 $-2 > -3, -4 > -5$ ，则 $(-2) \times (-4) = 8 < 15 = (-3) \times (-5)$ ，故 D 错误。

故选：B.

二、填空题

1. 4

【分析】因为 $x > 0$ ，直接利用基本不等式求出其最小值。

【详解】因为 $x > 0$ ，则 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ ，当且仅当 $x = 2$ 时，等号成立，

故答案为：4.

2. $\left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$

【分析】设 $2a + 3b = x(a + b) + y(a - b) = (x + y)a + (x - y)b$ ，利用系数相等求得 x, y 的值，结合不等式的基本性质，即可求解。

【详解】由题意，设 $2a + 3b = x(a + b) + y(a - b) = (x + y)a + (x - y)b$ ，

则 $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ，解得 $x = \frac{5}{2}, y = -\frac{1}{2}$ ，

因为 $-1 < a + b < 3, 2 < a - b < 4$ ，

可得 $-\frac{5}{2} < \frac{5}{2}(a + b) < \frac{15}{2}, -2 < -\frac{1}{2}(a - b) < -1$

所以 $-\frac{9}{2} < \frac{5}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) < \frac{13}{2}$ ，即 $2a + 3b$ 的取值范围是 $\left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ 。

故答案为： $\left(-\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ 。

3. $[0,1)$

【分析】将 $x + \sqrt{x} - 2 < 0$ 因式分解后即可求出解集，要注意隐藏条件 $x \geq 0$ 。

【详解】不等式 $x + \sqrt{x} - 2 < 0$ 可化为 $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) < 0$ ， $\therefore \sqrt{x} - 1 < 0$ ，

$\therefore 0 \leq x < 1$ 。

故答案为: [0,1).

4. 9

【分析】利用基本不等式解出最小值即可.

$$\text{【详解】} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) (\sqrt{x} + 4\sqrt{y}) = 5 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \geq 5 + 2\sqrt{4} = 9,$$

当且仅当 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, 即 $x = 4y > 0$ 时, 等号成立,

所以 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) (\sqrt{x} + 4\sqrt{y})$ 的最小值为 9.

故答案为: 9

5. 16

【分析】“1”

根据式子结构, 利用“1”的妙用求出最小值.

【详解】 \because 正数 a, b 满足 $a + b = 1$,

$$\therefore \frac{9}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{9}{a} + \frac{1}{b} \right) (a + b) = 9 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} + 1 = 10 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geq 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16, \text{ 当且仅当}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{9b}{a}, \\ a + b = 1, \end{cases} \text{也即当} \begin{cases} a = \frac{3}{4}, \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \text{时取“=”}.$$

故答案为: 16.

6. $\left[-\frac{5}{6}, 1 \right]$

【分析】由不等式的解和对应方程的根的关系通过韦达定理用 a 表示出 b, c , 然后代入目标不等式求解即可.

【详解】若不等式 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq 5\}$,

则方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的实数根为 1 和 5, 且 $a < 0$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{a} = 1 + 5 \\ \frac{c}{a} = 1 \times 5 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} b = -6a \\ c = 5a \end{cases}$$

则关于 x 的不等式 $bx^2 + ax + c \leq 0$ 为 $-6ax^2 + ax + 5a \leq 0$,

又 $a < 0$, $\therefore 6x^2 - x - 5 \leq 0$

解得 $-\frac{5}{6} \leq x \leq 1$

即关于 x 的不等式 $bx^2 + ax + c \leq 0$ 的解集为 $\left[-\frac{5}{6}, 1 \right]$

故答案为: $[-\frac{5}{6}, 1]$.

7. -10

【分析】根据一元二次不等式的解集与一元二次方程的根的关系可求 a, b 的值, 进而得解.

【详解】依题意有 $\begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{b}{a} \\ -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{a} \end{cases}$, 得 $\begin{cases} a = -12 \\ b = -2 \end{cases}$, 所以 $a - b = -10$.

故答案为: -10.

8. $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$

【分析】由已知变形可得出 $(x-1) + 2(y-1) = 2$, 将 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}$ 与 $\frac{1}{2}[(x-1) + 2(y-1)]$ 相乘, 展开后利用基本不等式可求得 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}$ 的最小值.

【详解】因为实数 $x > 1, y > 1$, 且 $x + 2y = 5$, 则 $(x-1) + 2(y-1) = 2$,

$$\begin{aligned} \text{所以, } \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} &= \frac{1}{2}[(x-1) + 2(y-1)] \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \right) = \frac{1}{2} \left[3 + \frac{x-1}{y-1} + \frac{2(y-1)}{x-1} \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[3 + 2 \sqrt{\frac{x-1}{y-1} \cdot \frac{2(y-1)}{x-1}} \right] = \frac{3}{2} + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\begin{cases} x-1 = \sqrt{2}(y-1) \\ (x-1) + 2(y-1) = 2 \end{cases}$ 时, 即当 $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}-1 \\ y = 3-\sqrt{2} \end{cases}$ 时, 等号成立.

因此, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}$ 的最小值为 $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$.

9. 8

【分析】根据扇形的面积公式、弧长公式、周长公式、基本不等式求解即可.

【详解】设扇形所在圆的半径为 r , 弧所对的圆心角为 α , 弧长为 l , 面积为 S ,

$$\text{则 } l = \alpha r, S = \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2} \alpha r^2 = 4, \text{ 即 } \alpha r^2 = 8,$$

所以扇形的周长 $C = 2r + l = 2r + \alpha r \geq 2\sqrt{2\alpha r^2} = 8$, 当且仅当 $\alpha = 2$ 时取等号,
所以扇形的周长的最小值为 8cm.

故答案为: 8.

10. $2\sqrt{3} + 2$

【分析】利用基本不等式求得 $x + \frac{3}{x-2}$ 的最小值.

【详解】由于 $x > 2$, 所以 $x - 2 > 0$,

$$\text{所以 } x + \frac{3}{x-2} = x - 2 + \frac{3}{x-2} + 2 \geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{3}{x-2}} + 2 = 2\sqrt{3} + 2,$$

当且仅当 $x - 2 = \frac{3}{x-2}$, $x = 2 + \sqrt{3}$ 时等号成立.

故答案为: $2\sqrt{3} + 2$

11. 4

【分析】定价为 x 元时, 销售数量为 $6 - \frac{x-3}{0.1} \times 0.1$, 从而求出定价为 x 元时的总销售额, 依据题意列出不等式解出即可.

【详解】当定价为 x 元时, 销售数量为 $6 - \frac{x-3}{0.1} \times 0.1$

$$\text{所以总销售额而 } \left(6 - \frac{x-3}{0.1} \times 0.1\right)x = 9x - x^2$$

由题意得: $9x - x^2 \geq 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 \leq 0$ ($3 < x < 6$)

解的: $4 \leq x \leq 5$

则 x 的最小值为: 4

故答案为: 4.

12. $(-\infty, -2)$

【分析】利用一元二次方程的根的分布与系数的关系, 结合二次函数的性质即得.

【详解】 \because 方程 $x^2 - (2-a)x + 5 + a = 0$ 的一根大于 1, 另一根小于 1,

令 $f(x) = x^2 - (2-a)x + 5 + a$,

则 $f(1) = 1 - (2-a) + 5 + a < 0$,

解得 $a < -2$.

故答案为: $(-\infty, -2)$.

13. 64

【分析】设出 $BM = x$, 利用三角形相似得到 $DN = \frac{16}{x}$, 表达出矩形花坛 $AMPN$ 面积, 利用基本不等式求出最小值.

【详解】设 $BM = x$, 则 $AM = AB + BM = 4 + x$, $CD = AB = 4$,

由三角形相似可得: $\frac{CD}{AM} = \frac{DN}{AN}$, 即 $\frac{4}{4+x} = \frac{DN}{DN+4}$,

$$\therefore DN = \frac{16}{x},$$

故 $S = \left(\frac{16}{x} + 4\right)(4+x) = \frac{64}{x} + 4x + 32 \geq 32 + 2\sqrt{\frac{64}{x} \cdot 4x} = 64$, 当且仅当 $x = 4$ 时取等号成立,

故面积的最小值是 64.

故答案为: 64.

14. [0,1)

【分析】由题意, “ $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - 2ax + 1 > 0$ 恒成立” 是真命题, 然后分 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况讨论即可求解.

【详解】解: 因为命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 成立” 是假命题,

所以命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 - 2ax + 1 > 0$ 恒成立” 是真命题,

当 $a = 0$ 时, $1 > 0$, 显然成立;

当 $a \neq 0$ 时, $ax^2 - 2ax + 1 > 0$ 恒成立, 只须满足 $\begin{cases} a > 0 \\ 4a^2 - 4a < 0 \end{cases}$, 解得 $0 < a < 1$,

综上, 实数 a 的取值范围是 $[0,1)$.

故答案为: $[0,1)$.

15. $0 < a \leq 1$

【分析】由题设得 p 为真 $0 < x < 1$, q 为真 $0 < x \leq \frac{1}{a}$, 根据它们的充分不必要关系即可求 a 的范围.

【详解】 p 为真, 则 $0 < x < 1$;

q 为真, 则 $\frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} \geq 0$ 且 $a > 0$, 即 $\frac{x(ax-1)}{x} \leq 0$, 则 $0 < x \leq \frac{1}{a}$,

由 p 是 q 的充分不必要条件, 故 $\frac{1}{a} \geq 1$, 则 $a \leq 1$,

综上, $0 < a \leq 1$

故答案为: $0 < a \leq 1$

第六章 空间几何体

一、选择题

1. C

【分析】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 高为 h , 根据题意列出方程解出即可..

【详解】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 高为 h ,

由于圆锥侧面展开图是一个半圆,

$$\text{故有 } 2\pi r = \pi l \Rightarrow l = \frac{2\pi r}{\pi} = 2r,$$

即圆锥母线长为 $l = 2r$,

$$\text{又圆锥的表面积为 } \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi \cdot (2r)^2 = 3\pi r^2 = 3\pi,$$

解得 $r = 1$,

$$\text{所以圆锥的高为 } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

故选: C.

2. B

【分析】根据球与圆锥的表面积计算公式, 建立方程, 可得答案.

【详解】设圆锥的母线长为 l , 底面圆的半径为 r , 球的半径为 R , 则 $l = 2r = R$, 即 $R = 2r$, $l = 2r$,

球的表面积 $S_1 = 4\pi R^2 = 16\pi r^2$, 圆锥的表面积 $S_2 = \pi rl + \pi r^2 = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$,

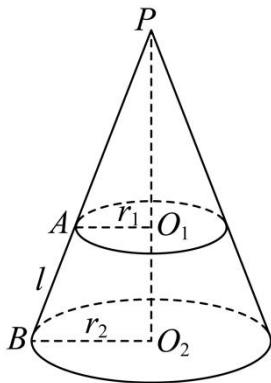
$$\text{则 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{16\pi r^2}{3\pi r^2} = \frac{16}{3}.$$

故选: B.

3. B

【分析】由所截圆台的上下底面半径的比例及母线长, 即可求得圆锥的母线长, 再利用圆锥侧面积公式即可得到答案.

【详解】如图所示:



圆台的上底面半径为 $r_1 = 2\text{cm}$, 下底面半径为 $r_2 = 3\text{cm}$, 圆台母线长为 $l = 4\text{cm}$,

则 $\frac{PA}{PA+4} = \frac{2}{3}$, 解得 $PA = 8$, 所以圆锥母线长为 $PB = PA + 4 = 12$,

所以该圆锥的侧面积为 $S_{\text{侧}} = \pi \times 3 \times 12 = 36\pi \text{ cm}^2$

故选: B.

4. D

【分析】根据棱柱、棱锥、圆柱, 以及球面与球体的几何特征, 逐项判定, 即可求解.

【详解】A 中, 既是直四棱柱又是平行六面体的几何体, 此时底面可能不是矩形, 所以不一定为长方体, 所以 A 不正确;

B 中, 棱锥的侧棱长不一定大于棱锥的底面边长, 例如正四棱锥的底面边长为 4, 侧棱长为 3, 此时侧棱长小于底面边长, 所以 B 不正确;

C 中, 以半圆直径所在的直线为旋转轴, 旋转一周形成的曲面叫球面, 球面所围成的几何体叫做球体, 所以 C 不正确.

D 中, 一个矩形以其对边的中点连线为旋转轴, 旋转 180° , 满足圆柱的定义, 所以形成的几何体是圆柱, 所以 D 正确.

故选: D.

5. C

【分析】根据侧面展开图的弧长等于底面周长列方程求出底面半径, 再利用勾股定理可求出圆锥的高.

【详解】设圆锥底面圆半径 r ,

因为圆锥的侧面展开图是半径为 2, 圆心角为 180° 的扇形,

所以 $2\pi r = 2\pi$, 即 $r = 1$,

所以圆锥的高为 $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

故选: C

6. B

【分析】通过圆锥的底面半径和高, 可求出圆柱的高和底面半径, 再结合圆锥的表面积与圆柱的侧面积可求得剩下几何体的表面积.

【详解】设圆柱的高为 h , 底面半径为 r , 可知 $h = \frac{1}{2} \times 4 = 2$, $r = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 4 = 1$,

则圆锥的母线长为 $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

所以剩下几何体的表面积为 $\pi \times 2^2 + 2\pi \times 1 \times 2 + \pi \times 2 \times 2\sqrt{5} = (8 + 4\sqrt{5})\pi$.

故选: B.

7. A

【分析】由条件确定 $2r + h = 6$, 再将体积转化为关于 r 的三次函数, 利用导数求体积的最大值.

【详解】圆柱的底面半径为 r , 高为 h , 则 $4r + 2h = 12$, 即 $2r + h = 6$,

圆柱的体积 $V = \pi r^2 h = \pi r^2(6 - 2r) = -2\pi r^3 + 6\pi r^2$, $0 < r < 3$,

$$V' = -6\pi r^2 + 12\pi r = -6\pi r(r - 2),$$

当 $0 < r < 2$ 时, $V' > 0$, 函数单调递增, 当 $2 < r < 3$ 时, $V' < 0$, 函数单调递减,

所以, 当 $r = 2$ 时, 函数 $V(r)$ 取得最大值, 最大值 $V(2) = 8\pi$.

故选: A

8. B

【分析】根据几何体的结构特征逐项分析判断.

【详解】对于 A: 虽然各侧面都是正方形, 但底面不一定是正方形,

所以该四棱柱不一定是正方体, 故 A 错误;

对于 B: 球的直径的定义即为“连接球面上两点并且经过球心的线段”, 故 B 正确;

对于 C: 以直角三角形的直角边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥,

以直角三角形的斜边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是两个共底面的圆锥组成的几何体,

故 C 错误;

对于 D: 用一个平行于底面的平面截圆锥, 得到一个圆锥和圆台, 故 D 错误;

故选: B.

9. B

【分析】设甲、乙两个圆锥的母线长分别为 l_1, l_2 , 甲、乙圆锥底面圆半径相等设为 r . 由已

知列出方程，得出母线与半径的关系，再求解圆锥的高，得到两个圆锥的体积比。

【详解】设甲、乙两个圆锥的母线长分别为 l_1, l_2 。

由甲、乙两个圆锥的底面积相等，得出两个圆锥底面圆半径相等，设为 r 。

由侧面展开图的圆心角之和为 2π ，得 $\frac{2\pi r}{l_1} + \frac{2\pi r}{l_2} = 2\pi$ ，则 $\frac{r}{l_1} + \frac{r}{l_2} = 1$ ①。

因为 $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$ ，则 $\frac{\pi rl_1}{\pi rl_2} = \frac{l_1}{l_2} = 2$ ，

所以 $l_1 = 2l_2$ ②，

由①②解得 $l_1 = 3r, l_2 = \frac{3r}{2}$ ，

所以甲圆锥的高 $h_1 = \sqrt{l_1^2 - r^2} = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$ ，

乙圆锥的高 $h_2 = \sqrt{l_2^2 - r^2} = \sqrt{\frac{9}{4}r^2 - r^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}r$ ，

所以 $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r^2 h_2} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi r^3}{\frac{\sqrt{5}}{6}\pi r^3} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ 。

故选：B。

10. D

【分析】表示出表面积后，根据二次函数性质可得。

【详解】大圆柱表面积为 $2 \times 15^2 \pi + 10 \times 2 \times 15 \pi = 750 \pi$

小圆柱侧面积为 $10 \times 2\pi r$ ，上下底面积为 $2\pi r^2$

所以加工后物件的表面积为 $750\pi + 20\pi r - 2\pi r^2$ ，当 $r = 5$ 时表面积最大。

故选：D

11. B

【分析】根据圆台的体积公式求得正确答案。

【详解】水桶的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times (15^2 + 15 \times 12 + 12^2) \times \frac{25}{2} = \frac{1}{3}\pi \times 549 \times 25$ ，

水的上底面半径为 $\frac{15+12}{2} = \frac{27}{2}$ ，

水的体积为 $\frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{27^2}{2^2} + \frac{27}{2} \times 12 + 12^2\right) \times \frac{25}{2} = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1953}{8} \times 25$ ，

所以水的体积约占水桶总体积的 $\frac{\frac{1}{3}\pi \times \frac{1953}{8} \times 25}{\frac{1}{3}\pi \times 549 \times 25} \times 100\% \approx 44\%$ 。

故选：B

12. D

【分析】根据圆柱侧面积公式以及圆的面积公式即可求解每个面的面积,进而可求表面积.

【详解】此几何体为两个半圆柱的组合体:一个大的半圆柱中间挖去一个小的同轴半圆柱,

$$S_{\text{表}} = \frac{1}{2} \times 2\pi (2^2 - 1^2) + \frac{1}{2}(2\pi \times 2 + 2\pi \times 1) \times 2 + 1 \times 2 \times 2 = 9\pi + 4.$$

故选: D

13. C

【分析】根据球的体积公式之比可得 $\frac{R_{\text{木}}}{R_{\text{地}}} = 20\sqrt{30}$, 结合球的表面积公式化简计算即可求解.

【详解】由题意知, 木星的体积约是地球体积的 $240\sqrt{30}$ 倍,

$$\frac{V_{\text{木}}}{V_{\text{地}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_{\text{木}}^3}{\frac{4}{3}\pi R_{\text{地}}^3} = \left(\frac{R_{\text{木}}}{R_{\text{地}}}\right)^3 = 240\sqrt{30},$$

$$\text{所以 } \frac{R_{\text{木}}}{R_{\text{地}}} = 2\sqrt{30},$$

$$\text{所以 } \frac{S_{\text{木}}}{S_{\text{地}}} = \frac{4\pi R_{\text{木}}^2}{4\pi R_{\text{地}}^2} = \left(\frac{R_{\text{木}}}{R_{\text{地}}}\right)^2 = (2\sqrt{30})^2 = 120,$$

即木星的表面积约是地球表面积的 120 倍.

故选: C.

14. B

【分析】根据圆锥的侧面积可得两圆锥的底面圆半径关系,进而根据表面积公式即可求解.

【详解】设圆的半径为 r , 圆锥 A 与 B 的底面半径分别为 r_1, r_2 , 由题意知 $\begin{cases} 2\pi r_1 = \frac{\pi}{2}r, \\ 2\pi r_2 = \frac{3\pi}{2}r, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} r_1 = \frac{1}{4}r, \\ r_2 = \frac{3}{4}r, \end{cases}$, 圆锥 A 的表面积 $S_A = \pi r_1^2 + \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{5}{16}\pi r^2$, 圆锥 B 的表面积 $S_B = \pi r_2^2 +$

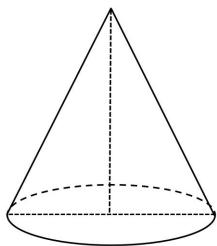
$$\frac{3}{4}\pi r^2 = \frac{21}{16}\pi r^2, \text{ 故 } \frac{S_A}{S_B} = \frac{5}{21}.$$

故选:B

15. C

【分析】根据题意,结合图形,利用等边三角形的性质、三角形的面积公式、圆锥的体积公式求解.

【详解】设底面半径为 r , 由圆锥的轴截面是等边三角形且面积为 $4\sqrt{3}$,



$$\frac{1}{2} \cdot (2r)^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}, \text{ 解得 } r=2, \text{ 所以圆锥的高 } h = 2r \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以圆锥的体积为 } \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}. \text{ 故 A, B, D 错误.}$$

故选：C.

二、填空题

$$1. \frac{48\pi}{5}$$

【分析】利用勾股定理求出斜边的长，再求出斜边上的高，从而可知该几何体为两个同底面的圆锥，底面半径为 $\frac{12}{5}$ ，两个圆锥的高之和为5，进而可求出其体积.

【详解】因为 $Rt \triangle ABC$ 的两条直角边分别为3, 4，所以由勾股定理知斜边为5，则斜边上的高为 $\frac{12}{5}$ ，

所以几何体为两个同底面的圆锥，底面半径为 $\frac{12}{5}$ ，两个圆锥的高之和为5，

$$\text{所以该几何体体积为 } \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{12}{5}\right)^2 \times 5 = \frac{48\pi}{5},$$

$$\text{故答案为: } \frac{48\pi}{5}$$

$$2. \frac{28\sqrt{2}}{3}$$

【分析】根据台体的结构特征结合台体的体积公式运算求解.

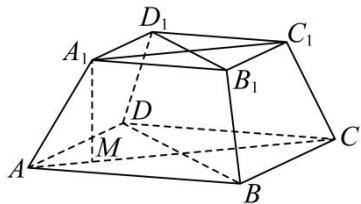
【详解】如图，过 A_1 作下底面的投影，垂足为 M ，

$$\text{上底面对角线长 } A_1C_1 = 2\sqrt{2}, \text{ 下底面对角线长 } AC = 4\sqrt{2}, \text{ 则 } AM = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \sqrt{2},$$

$$\text{可得正四棱台的高 } A_1M = \sqrt{A_1A^2 - AM^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以正四棱台的体积 } V = \frac{1}{3}(4 + \sqrt{4 \times 16} + 16) \times \sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{28\sqrt{2}}{3}.$$



3. 12

【分析】根据给定条件利用柱体体积公式求出水的实际体积，再由两种情况的放置水的体积相同求解作答。

【详解】设 $\triangle ABC$ 的面积为 a ，底面 ABC 水平放置时，液面高为 h ，

$$\text{侧面 } AA_1B_1B \text{ 水平放置时，水的体积为 } V = \frac{3}{4}S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{3}{4}a \cdot 16 = 12a$$

当底面 ABC 水平放置时，水的体积为 $V = S_{\triangle ABC}h = ah$ ，于是 $ah = 12a$ ，解得 $h = 12$ ，所以当底面 ABC 水平放置时，液面高为12。

故答案为：12

4. 3

【分析】根据球体的体积和表面积数值相等的条件得到等式关系，解方程即可求出球的半径

【详解】假设球体的半径为 R ，由已知条件球体的体积与其表面积数值相等，

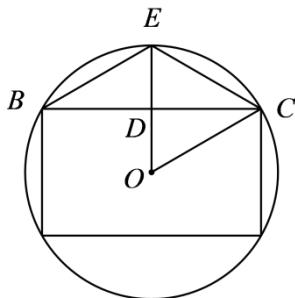
$$\text{得 } \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2, \text{ 解得 } R = 3.$$

故答案为：3

5. $4\sqrt{6}\pi$

【分析】根据题意画出该几何体的轴截面，如图，设 O 是球心， E 是圆锥的顶点， EC 是圆锥的母线，求出球的半径，从而可求出 DE, DC ，进而可求得圆锥的侧面积。

【详解】其中， O 是球心， E 是圆锥的顶点， EC 是圆锥的母线，



由题意可知 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, 解得 $R = 3$,

由于圆柱的高为 2, $OD = 1$, $DE = 3 - 1 = 2$, $DC = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$,

母线 $EC = \sqrt{2^2 + 8} = 2\sqrt{3}$,

\therefore 圆锥的侧面积为 $S = \pi \cdot DC \cdot EC = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3}\pi = 4\sqrt{6}\pi$.

故答案为: $4\sqrt{6}\pi$

6. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

【分析】根据圆锥侧面的扇形弧长等于圆锥的底面周长可求母线长, 进而由母线和底面半径可求圆锥的高, 即可求体积.

【详解】由题可知该圆锥的底面半径 $r = 1$, 设圆锥的母线长为 l , 则 $\frac{2\pi l}{3} = 2\pi r$, 得 $l = 3$.

此该圆锥的体积 $V = \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times \sqrt{3^2 - 1} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

7. 3

【分析】根据在上面往下面钻一个圆柱形孔后其表面积没有变化, 可知圆孔的侧面积与两个底面的面积和相等, 然后列出等式即可求解.

【详解】解: 正方体被钻掉一个圆柱形孔后, 正方体的表面积减少了两个圆柱的底面积大小, 同时又增加了圆柱的侧面积,

\therefore 在上面往下面钻一个圆柱形孔后其表面积没有变化, \therefore 圆孔的侧面积与两个底面的面积和相等,

设圆柱的底面半径为 r , 则 $2\pi r^2 = 2\pi r \cdot 3$, 即 $r = 3$,

故答案为: 3.

8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】根据圆锥和圆柱的侧面积公式, 求得圆锥和圆柱的侧面积, 即可求解.

【详解】由题意, 圆锥的母线长为 $l = \sqrt{h_1^2 + r^2} = \sqrt{2}r$, 则圆锥的侧面积为 $S_1 = \pi r l = \sqrt{2}\pi r^2$,

根据圆柱的侧面积公式, 可得圆柱的侧面积为 $S_2 = 2\pi r h_2 = 2\pi r^2$,

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. $\frac{3}{2}$

【分析】设球的半径为 r , 可得圆柱的底面半径为 r , 高为 $2r$, 代入圆柱与球的体积公式求解即可.

【详解】设球的半径为 r , 则圆柱的底面半径为 r , 高为 $2r$,

\therefore 圆柱的体积为: $V = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, 球的体积为: $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$,

\therefore 圆柱的体积与球的体积之比为 $\frac{2\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

10. 3

【分析】根据题意, 构造无盖圆柱形水桶的表面积关于底面半径的函数, 利用导数求其最小值时, 对应的底面半径即可.

【详解】不妨设该圆柱形水桶的底面半径为 r , 其高为 h ,

则由其容积为 27π 可得 $27\pi = \pi r^2 \times h$, 即 $h = \frac{27}{r^2}$,

故该无盖圆柱形水桶的表面积 $S = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$,

令 $y = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$ ($r > 0$), 则 $y' = \frac{2\pi(r^3 - 27)}{r^2}$,

当 $0 < r < 3$ 时, $y' < 0$, 此时该函数单调递减, 当 $r > 3$ 时, $y' > 0$, 该函数单调递增,

故当 $r = 3$ 时, $y = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}$ ($r > 0$) 取得最小值, 也即该水桶用料最省.

故答案为: 3.

11. $\frac{3}{2}/1.5$

【分析】根据水的体积与棱柱体积的关系得出结论.

【详解】棱柱的体积公式是 $V = Sh$, 其中 S 是底面积, h 是高.

在图 2 中, 水面是中截面, 水面上部分是一个三棱柱, 所以这个三棱柱的底面积是原来三棱柱底面的 $\frac{1}{4}$, 从而这个小三棱柱的体积是大棱柱体积的 $\frac{1}{4}$ (高一样), 所以水的体积是大三棱柱体积的 $\frac{3}{4}$, 那么图 1 中水面的高度是棱柱高的 $\frac{3}{4}$, 即为 $\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$.

12. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi/\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$

【分析】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 高为 h , 根据圆锥的表面积为 $3\pi \text{ cm}^2$, 得到 $\pi rl + \pi r^2 = 3\pi$, 再由圆锥的侧面展开图是一个半圆, 得到 $\pi l = 2\pi r$, 联立求解.

【详解】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 高为 h ,

因为圆锥的表面积为 $3\pi \text{ cm}^2$,

所以 $\pi rl + \pi r^2 = 3\pi$, 即 $rl + r^2 = 3$,

又圆锥的侧面展开图是一个半圆,

所以 $\pi l = 2\pi r$, 即 $l = 2r$,

所以 $r = 1, l = 2, h = \sqrt{3}$,

所以这个圆锥的体积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \text{ cm}^3$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

13. $9\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

【分析】利用柱体体积公式分别计算六棱柱和中间空圆柱的体积, 相减即得.

【详解】六棱柱的体积为: $\left\{6 \times \left[\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3} \times \sin 60^\circ)\right]\right\} \times 2 = 9\sqrt{3}$,

圆柱的体积为: $\pi \times (0.5)^2 \times 2 = \frac{\pi}{2}$,

所以此六角螺帽毛坯的体积是: $(9\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}) \text{ cm}^3$.

故答案为: $9\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

14. 6π

【分析】求出圆柱的底面半径和母线长, 进而可求得圆柱的表面积.

【详解】设圆柱的底面半径为 r , 则圆柱的母线长为 $2r$, 由题意可得 $4r^2 = 4$, 解得 $r = 1$, 因此, 该圆柱的表面积为 $S = 2\pi r^2 + 2\pi r \times 2r = 6\pi r^2 = 6\pi$.

故答案为: 6π .

15. 1

【分析】设圆柱底面半径为 r , 高为 h , 求出底面积的侧面积, 即可得结论.

【详解】设圆柱底面半径为 r , 高为 h ,

由题意 $2\pi r^2 = 2\pi r h$, 所以 $r = h$, 即 $\frac{r}{h} = 1$.

故答案为: 1.

第七章 统计与概率

一、选择题

1. A

【分析】利用古典概型概率的计算公式即可求出结果.

【详解】根据题意可知，从6个数字中无放回地随机抽取两张，共有 $6 \times 5 = 30$ 种，若要是5的倍数，则两张卡片中必有一张是5；

若第一张抽到的是5，共有5种抽法；若第二张抽到的是5，共有5种抽法；共10种抽法；

所以所求概率为 $P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

故选：A

2. C

【分析】根据题意结合中位数、平均数和方差的定义分析判断.

【详解】不妨设原始分为 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_7 \leq x_8$ ，且 $x_1 \neq x_8$ ，则其中位数为 $\frac{x_4+x_5}{2}$ ，

则有效分为 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_7$ ，则其中位数为 $\frac{x_4+x_5}{2}$ ，

两者相等，所以中位数不变，

例如：原始分为1,2,2,2,2,2,2,3，则其平均数为2，

则有效分为2,2,2,2,2,2，则其平均数为2，

两者相等，所以平均数可能不变，

因为从8个原始分中去掉1个最高分和1个最低分（最高分和最低分不相等），得到6个有效分，即把波动最大的两个值去掉，

则有效分比原始分更集中，波动性减小，

根据方差的定义可知：有效分的方差小于原始分的方差，即方差变小.

故选：C.

3. B

【分析】设高三男生人数为n人，则高三女生人数为 $(600 - n)$ 人，利用分层抽样可得出关于n的等式，解之即可.

【详解】设高三男生人数为n人，则高三女生人数为 $(600 - n)$ 人，

由分层抽样可得 $\frac{600-n}{600} = \frac{11}{20}$ ，解得 $n = 270$.

故选: B.

4. D

【分析】分类讨论利用分步乘法和分类加法计数原理计算即可.

【详解】分两类:

第一类: 选衬衣加裙子, 共有 $4 \times 3 = 12$ 种选法;

第二类: 选连衣裙, 共有 2 种选法,

根据分类加法计数原理共有 14 种选法.

故选: D.

5. B

【分析】根据全概率公式结合已知条件求解即可.

【详解】设事件 A 表示“乘火车”, 事件 B 表示“乘轮船”, 事件 C 表示“乘飞机”, 事件 D 表示“迟到”,

则 $P(A) = 0.3$, $P(D|A) = 0.2$, $P(B) = 0.3$, $P(D|B) = 0.3$, $P(C) = 0.4$, $P(D|C) = 0.4$, $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$,

由全概率公式得: $P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) = 0.3 \times 0.2 + 0.3 \times 0.3 + 0.4 \times 0.4 = 0.31$.

故选: B.

6. A

【分析】利用列举法, 列出 5 条线段中任取 3 条线段的所有情况, 然后找出能构成三角形的情况, 再利用古典概型的概率公式求解即可.

【详解】从 5 条线段中任取 3 条, 可能的情况有: (2,4,6), (2,4,8), (2,4,10), (2,6,8), (2,6,10), (2,8,10), (4,6,8), (4,6,10), (4,8,10), (6,8,10) 共有 10 种可能,

其中, 能构成三角形的只有(4,6,8), (4,8,10), (6,8,10) 共 3 种可能,

所以能构成三角形的概率为 $\frac{3}{10}$.

故选: A.

7. B

【分析】根据该医生可能来自甲组, 也可能来自乙组, 再结合组合数求解满足条件的选法即可.

【详解】由题意, 甲、乙两组中各抽调 2 名人员, 则选出的 4 名人员中恰有 1 名医生, 该医生可能来自甲组, 也可能来自乙组, 故不同选法共有 $C_4^1 C_1^1 C_6^2 C_2^0 + C_4^2 C_1^0 C_6^1 C_2^1 = 60 + 72 = 132$ 种.

故选：B

8. C

【分析】列举每个事件所包含的基本事件，结合互斥事件和对立事件的定义，依次验证即可。

【详解】对于 A：事件：“至少有一个黑球”与事件：“都是黑球”可以同时发生，如：两个都是黑球， \therefore 这两个事件不是互斥事件， \therefore A 不正确；

对于 B：事件：“至少有一个黑球”与事件：“至少有一个红球”可以同时发生，如：一个红球一个黑球， \therefore B 不正确；

对于 C：事件：“恰好有一个黑球”与事件：“恰有两个黑球”不能同时发生，但从口袋中任取两个球时还有可能是两个都是红球， \therefore 两个事件是互斥事件但不是对立事件， \therefore C 正确；

对于 D：事件：“至少有一个黑球”与“都是红球”不能同时发生，但一定会有一个发生， \therefore 这两个事件是对立事件， \therefore D 不正确；

故选：C.

9. B

【分析】这段时间内至少 1 人回老家过节的对立事件是这段时间没有人回老家过节，由此能求出这段时间内至少 1 人回老家过节的概率。

【详解】端午节放假，甲回老家过节的概率为 $\frac{1}{3}$ ，乙，丙回老家过节的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

假定三人的行动相互之间没有影响，

这段时间内至少 1 人回老家过节的对立事件是这段时间没有人回老家过节，

\therefore 这段时间内至少 1 人回老家过节的概率为： $p = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$

故选：B.

10. C

【分析】根据分层抽样按比例抽取计算即可；

【详解】在乙校应抽取学生人数为： $\frac{48}{800} \times 500 = 30$ 人，

故选：C.

11. D

【分析】求出 36 岁至 50 岁的居民所占的比例，即可求得答案。

【详解】由题意知 36 岁至 50 岁的居民所占的比例为 $\frac{700}{840+700+560} = \frac{1}{3}$ ，

故这次抽样调查抽取的总人数是 $100 \times 3 = 300$ ，

故选：D

12. B

【分析】根据事件的描述，结合互斥、对立事件的概念判断即可。

【详解】 A, B 两事件， A, D 两事件不可能同时发生，为互斥事件，AC 正确；

D 事件包含：三名学生都是男生、三名学生有一名男生、三名学生有两名男生，与 C 事件含义相同，故 $P(C) = P(D)$ ，B 错误；

C 事件包含：三名学生有一名男生、三名学生有两名男生、三名学生都是男生，其对立事件为 A ，D 正确。

故选：B。

13. A

【分析】根据每次放的砝码重量分类讨论，结合两个基本计数原理求解。

【详解】根据每次放的砝码重量分类讨论，结合两个基本计数原理求解，有以下三种情况：

①第一步先放 4，则 4 只能在左边，接下来重量为 1, 2 的砝码顺序随意有 2 种，左右边随意有 2^2 种，

则共有 $2 \times 2^2 = 8$ 种放法；

②第一步先放 2, 2 只能在左边，

若第二步放 4，则 4 只能在左边，第三步砝码 1 左右边随意放，有 2 种放法，

若第二步放 1，则砝码 1 左右两边随意放，有 2 种放法，第三步砝码 4 只能在左边，有 1 种放法，

则共有 4 种放法；

③第一步先放 1，则 1 只能在左边，

若第二步放 4，则 4 只能在左边，第三步砝码 2 左右边随意放，共有 2 种；

若第二步放 2, 2 只能在左边，第三步砝码 4 只能在左边，共有 1 种；

则共有 3 种放法，

综上，有 $8 + 4 + 3 = 15$ 种放法。

故选：A.

14. B

【分析】利用分层抽样的方法求解即可。

【详解】因为 $\frac{30}{150} = \frac{1}{5}$ ，即应按照 1:5 的比例来抽取，

所以高级职称应抽取 $15 \times \frac{1}{5} = 3$ (人)；

中级职称应抽取 $45 \times \frac{1}{5} = 9$ (人);

一般职员应抽取 $90 \times \frac{1}{5} = 18$ (人).

故选: B

15. A

【分析】先 5 人中选 2 人出来, 他们的两编号一致, 剩下 3 人编号均不一致, 有两种坐法, 由乘法原理可得.

【详解】由题意 5 人中选 2 人出来, 他们的两编号一致, 剩下 3 人编号不一致, 则有两种坐法,

所以恰有两位同学的编号和座位编号一致的坐法种数为 $C_5^2 \times 2 = 20$.

故选: A.

二、填空题

1. $7.5 / \frac{15}{2}$

【分析】由极差和平均数求出 x , 即可求出中位数.

【详解】依题意可得极差为 $10 - 3 = 7$, 平均数为 $\frac{1}{6}(3 + 5 + x + 8 + 9 + 10) = \frac{1}{6}(35 + x)$,

所以 $\frac{1}{6}(35 + x) = 7$, 解得 $x = 7$,

所以中位数为 $\frac{7+8}{2} = 7.5$.

故答案为: 7.5

2. $0.672 / \frac{84}{125}$

【分析】根据独立事件的乘法公式和对立事件的概率计算公式即可得到答案.

【详解】由题意, 电路能正常工作的条件是:

A 必须正常工作, B, C 至少有一个正常工作,

所以电路能正常工作的概率为 $0.8 \times [1 - (1 - 0.6)(1 - 0.6)] = 0.672$,

故答案为: 0.672.

3. $\frac{16}{81}$

【分析】设比赛结束时进行的局数为 X , 确定其取值为 2,4,6, 求得 $P(X = 2), P(X = 4)$ 的值, 即可求得答案.

【详解】设比赛结束时进行的局数为 X , 则 X 的可能取值为 2,4,6,

$$\text{则 } P(X=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9},$$

4 局结束时, 即前两局甲、乙各胜一局, 后两局都是最终的获胜者胜,

$$\text{故 } P(X=4) = C_2^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} + C_2^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{81},$$

$$\text{则 } P(X=6) = 1 - P(X=2) - P(X=4) = \frac{16}{81},$$

即 6 局后才停止比赛的概率为 $\frac{16}{81}$,

$$\text{故答案为: } \frac{16}{81}$$

4. 480

【分析】根据题意, 可分为志愿组有 3 名男生, 2 名女生和志愿组有 4 名男生, 1 名女生, 两类情况, 结合分类计数原理, 即可求解.

【详解】由题意可知, 当志愿组有 3 名男生, 2 名女生时, 有 $C_5^3 C_3^2 C_3^1 C_2^1 A_2^2 = 360$ 种方法;

当志愿组有 4 名男生, 1 名女生时, 有 $C_5^4 C_3^1 C_4^1 A_2^2 = 120$ 种方法,

由分类计数原理得, 共有 $360 + 120 = 480$ 种不同的选法.

故答案为: 480.

5. 50

【分析】根据分层抽样原理计算应从 C 学校抽取的人数即可.

【详解】根据分层抽样法从三所中学抽取 100 名学生, 应从 C 学校抽取的人数为 $100 \times$

$$\frac{500}{200+300+500} = 50.$$

故答案为: 50.

6. 10

【分析】分两种情况考虑, 即每个家庭乘坐一辆车和每对夫妻乘坐的车上恰有一个自己的孩子, 根据分类加法原理即可得答案.

【详解】由题意得当每个家庭各乘坐一辆车时, 有 2 种乘车方案;

当每对夫妻乘坐的车上恰有一个自己的孩子时, 乘车方案种数为 $2 \times C_2^1 C_2^1 = 8$,

故满足条件的不同乘车方案种数为 $2 + 8 = 10$,

故答案为: 10

$$7. \frac{7}{4}$$

【分析】利用平均数和方差的定义直接求解即可.

【详解】设这个样本容量为 7 的样本数据分别为 $x_1, x_2 \dots x_7$, 则 $\frac{x_1+x_2+\dots+x_7}{7} = 5$,

$$\text{所以 } x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 35, \frac{(x_1-5)^2+(x_2-5)^2+\dots+(x_7-5)^2}{7} = 2,$$

$$\text{所以 } (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + \dots + (x_7 - 5)^2 = 14.$$

$$\text{当加入新数据 5 后, 平均数 } \bar{x} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_7+5}{8} = 5,$$

$$\text{方差 } s^2 = \frac{1}{8}[(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + \dots + (x_7 - 5)^2 + (5 - 5)^2] = \frac{1}{8}[14 + 0] = \frac{7}{4}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{7}{4}$$

8. 36

【分析】先分成 3 组, 然后再分配到三馆可得.

【详解】将 4 名志愿者分成 3 组, 有 $\frac{C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 6$ 种,

$$\text{然后将 3 组分配给 3 个场馆有 } A_3^3 = 6 \text{ 种},$$

所以总的分配方案共 $6 \times 6 = 36$ 种.

故答案为: 36

$$9. \frac{1}{8}$$

【分析】先求出事件“后排的每棵小树都对应比它前排每棵小树高”包含的基本事件个数, 再根据古典概型的公式计算即可.

【详解】设六棵树从矮到高的顺序为 1,2,3,4,5,6,

“后排的每棵小树都对应比它前排每棵小树高”为事件 A ,

则 6 必在后排, 1 在前排,

因此, 有 6 在 1 的后面和 6 不在 1 的后面两种情况,

(1) 6 在 1 的后面时, 5 必在后排, 2 必在前排,

因此又分为 5 在 2 的后面和 5 不在 2 的后面两种,

① 5 在 2 的后面时, 4 必须在 3 的后面, 所以有 A_3^3 种;

② 5 不在 2 的后面时, 有 $2A_3^3$ 种;

(2) 6 不在 1 的后面时, 可分为 5 在前排和 5 在后排两种,

5 在前排, 则 6 必须在 5 的后面, 此时 4 必须在后排,

又可分为 4 在 1 的后面和 4 不在 1 的后面两种,

4 在 1 的后面：有 A_3^3 种；

4 不在 1 的后面：有 $2A_3^3$ 种.

5 在后排，又可分为 5 在 1 的后面和 5 不在 1 的后面两种，

5 在 1 的后面，2 必在前排，又分为 6 在 2 的后面和 6 不在 2 的后面两种，

6 在 2 的后面：有 A_3^3 种；

6 不在 2 的后面：有 $2A_3^3$ 种.

5 不在 1 的后面：有 $A_3^3 \cdot A_3^3$ 种.

$$\text{所以 } P(A) = \frac{3 \times 3A_3^3 + A_3^3 \cdot A_3^3}{A_6^3 \cdot A_3^3} = \frac{15}{6 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}.$$

故答案为： $\frac{1}{8}$

10. 24

【分析】根据题意结合平均数、方差的计算公式运算求解.

【详解】甲、乙两班全部学生的平均体重为 $\bar{x} = \frac{3}{5} \times 55 + \frac{2}{5} \times 60 = 57$ ；

甲、乙两队全部学生的体重方差为 $s^2 = \frac{3}{5}[16 + (57 - 55)^2] + \frac{2}{5}[21 + (57 - 60)^2] = 24$.

故答案为：24.

11. 60

【分析】利用组合以及分步计数原理求解.

【详解】先从 6 名大学毕业生选出 2 名安排到绿水村，有 C_6^2 种方法；再从剩余的 4 名大学毕业生选出 1 名安排到青山村，有 C_4^1 种方法；最后剩余的 3 名大学毕业生安排到人和村，有 1 种方法，

根据分步计数原理可知不同的安排方法共有 $C_6^2 C_4^1 = 60$ 种，

故答案为：60.

12. 3600

【分析】求出高三抽取的人数，计算抽样比，即可得出答案.

【详解】由已知可得，高三学生抽取的人数为 $36 - 15 - 12 = 9$ ，

抽样比为 $\frac{9}{900} = \frac{1}{100}$ ，

所以，该高中所有学生总数为 $\frac{36}{\frac{1}{100}} = 3600$.

故答案为：3600.

13. 36

【分析】先求出甲、乙相邻的不同站法有 $A_4^4A_2^2$, 再利用间接法求解即可.

【详解】甲、乙等五人在某景区站成一排拍照,

甲、乙相邻的不同站法有 $A_4^4A_2^2$,

其中甲站在两端的同站法有 $2A_3^3$,

所以甲不站在两端, 且甲、乙相邻的不同站法有 $A_4^4A_2^2 - 2A_3^3 = 48 - 12 = 36$ 种.

故答案为: 36.

14. 120

【分析】根据分层抽样的比例关系计算得到答案.

【详解】由题设, 若 200 名学生志愿者中女生有 x 人, 则 $\frac{x}{200} = \frac{30-12}{30}$,

所以 $x = \frac{18}{30} \times 200 = 120$ 人.

故答案为: 120

15. 14

【分析】分两种情况: “甲最后出场或者非最后出场” 进行讨论即可.

【详解】若甲最后出场, 其余三人全排列, 则有 $A_3^3 = 6$ 种;

若甲不在最后出场, 则甲有 2 种方式出场, 乙不是最后, 排完甲, 乙也有 2 种, 剩余两人全排列, 则有 $2 \times 2 \times A_2^2 = 8$ 种, 于是共有 $6 + 8 = 14$ 种.

故答案为: 14

大学数学

导数与积分

一、选择题

1. 【答案】B

【格木解析】有界函数与无穷小的乘积还是无穷小。

2. 【答案】C

【格木解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

3. 【答案】C

【格木解析】两边同时取极限 $x \rightarrow 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x \ln(2-x) + 3x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)]$, 得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 解得 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 。

4. 【答案】D

【格木解析】令 $t = 1 - x$, 则 $x = 1 - t$, $f(t) = (1-t)^3$, 所以 $f'(t) = -3(1-x)^2$ 、

5. 【答案】D

【格木解析】本题为简单的复合函数求导

6. 【答案】C

【格木解析】由 $f(x) = |x^2 - x|$ 的图像可知, 当 $x = 0$ 、 $x = 1$ 时, $f(x)$ 连续但不可导。

7. 【答案】B

【格木解析】 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

8. 【答案】C

【格木解析】对 $f(x)$ 求导得, $f'(x) = \cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$, 则 $f'(1) = \cos \frac{\pi}{1} \cdot \left(-\frac{\pi}{1}\right) = \pi$

9. 【答案】B

【格木解析】 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$, 当 $t=0$ 时, 即 $-\tan 0=0$ 。

10. 【答案】A

【格木解析】 $y'|_{x=1} = \left. \frac{1}{x} \right|_{x=1} = 1$

11. 【答案】B

【格木解析】 对函数求导得, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, 当 $0 \leq x < 1$ 时, $f'(x) < 0$,

即 $f(x)$ 单调递减; 当 $1 < x \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 单调递增, 当 $x=1$ 时, $f'(x)=0$, 所

以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取最小值, 即 $f(x)_{\min} = f(1) = -3$ 。

12. 【答案】A

【格木解析】 对函数求导得, $y' = 3x^2 + a$, 因 $a > 0$, 所以 $y' > 0$, 即原函数在定义域内单调递增, 则对于任意的正数 $x (x > 0)$, 有 $f(x) > f(0) = b > 0$, 即, 对于 $\forall x, x > 0$, 有 $f(x) > 0$, 即有 0 个正根。

13. 【答案】C

【格木解析】 根据不定积分公式。

14. 【答案】C

【格木解析】 $\int_{-3}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^3 = 18$, 故答案是 C。

教材教法

第一章 新课标

一、选择题

1. 【答案】B

【格木解析】数学教育承载着立德树人根本任务。

2. 【答案】C

【格木解析】小学数学教学应该改变过去的讲授式教学方式。

3. 【答案】A

【格木解析】小学数学课程内容的组织应重视数学结果的形成过程，处理好过程与结果的关系。

4. 【答案】A

【格木解析】学业质量是学生在完成课程阶段性学习后的学业成就表现，反映核心素养要求。

5. 【答案】B

【格木解析】小学数学核心素养具有整体性、一致性和阶段性，在不同阶段具有不同表现。

6. 【答案】B

【格木解析】数与代数是义务教育阶段学生数学学习的重要领域，在小学阶段包括数与运算和数量关系两个主题。

7. 【答案】C

【格木解析】数感主要是指对于数与数量、数量关系及运算结果的直观感悟。

8. 【答案】B

【格木解析】小学阶段的综合与实践活动教学实施主要采用主题式学习方式。

9. 【答案】C

【格木解析】了解是指从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征；根据对象的特征，从具体情境中辨认或举例说明对象。

10. 【答案】A

【格木解析】教学活动应注重启发式，激发学生学习兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑问难，引导学生在真实情境中发现问题和提出问题。

二、填空题

1. 【答案】坚持目标导向、坚持问题导向

【格木解析】2022 版新课程标准修订的原则有坚持目标导向、坚持问题导向，坚持创新导向

2. 【答案】数量关系、空间形式

【格木解析】数学是研究数量关系、空间形式的科学。

3. 【答案】普及性、发展性

【格木解析】义务教育数学课程具有基础性、普及性、发展性

4. 【答案】数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践。

【格木解析】《小学数学课程标准》一共安排了数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践。等四个学习领域。

5. 【答案】会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界

【格木解析】小学数学对于数学核心素养的培养主要包括三个方面，分别是会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界。

6. 【答案】独立思考、动手实践、自主探索

【格木解析】学生的学习应是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等是学习数学的重要方式。

7. 【答案】结构化整合

【格木解析】课程内容组织的重点应是对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径。

8. 【答案】基本思想、基本活动经验

【格木解析】课程目标以学生发展为本，以核心素养为导向，进一步强调使学生获得数学“四基”即基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验发展。

9. 【答案】学生学、教师教、主体、引导者、合作者。

【格木解析】有效的教学活动是学生学、教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者、合作者。

10. 【答案】不同的人在数学上得到不同的发展

【格木解析】义务教育数学课程的培养目标，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展，逐步形成适应终身发展需要的核心素养。

11. 【答案】量感

【格木解析】量感主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知。

12. 【答案】体验、感悟

【格木解析】课程描述过程目标的行为动词有经历、体验、感悟、探索等。

13. 【答案】课时、单元整体

【格木解析】改变过于注重以课时为单位的教学设计，推进单元整体教学设计，体现数学知识之间的内在逻辑关系，以及学习内容与核心素养表现的关联。

14. 【答案】数据分类；数据的收集、整理与表达；随机现象发生的可能性

【格木解析】小学阶段的统计与概率包括的主题有数据分类；数据的收集、整理与表达；随机现象发生的可能性。

15. 【答案】学习过程、学生学习、教师教学

【格木解析】小学数学教学评价不仅要关注学生数学学习结果，还要关注学生数学学习过程，激励学生学习，改进教师教学。

16. 【答案】数量关系和空间形式

【格木解析】数学是研究数量关系和空间形式的科学。

17. 【答案】数学素养、立德树人

【格木解析】数学素养是现代社会每一个公民应当具备的基本素养。数学教育承载着落实立德树人根本任务，实施素质教育的功能。

18. 【答案】基础性、普及性和发展性

【格木解析】义务教育数学课程具有基础性、普及性和发展性。

19. 【答案】基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验

【格木解析】学生通过数学课程的学习，掌握适应现代生活及进一步学习必备的基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验激发学习数学的兴趣，养成独立思考的习惯和合作交流的意愿；发展实践能力和创新精神，形成和发展核心素养。

20. 【答案】现实世界

【格木解析】数学源于对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，得到数学的研究对象及其关系；基于抽象结构，通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等，形成数学的结论和方法，帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律。

21. 【答案】人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展

【格木解析】义务教育数学课程致力于实现义务教育阶段的培养目标，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展，逐步形成适应终身发展需要的核心素养。

22. 【答案】确立核心素养导向的课程目标、设计体现结构化特征的课程内容、实施促进学生发展的教学活动、探索激励学习和改进教学的评价、促进信息技术与数学课程融合。

【格木解析】义务教育数学课程五大核心理念包括确立核心素养导向的课程目标、设计体现结构化特征的课程内容、实施促进学生发展的教学活动、探索激励学习和改进教学的评价、

促进信息技术与数学课程融合。

23. 【答案】基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验；发现问题的能力、提出问题的能力、分析问题的能力和解决问题的能力，情感、态度和价值观。

【格木解析】课程目标以学生发展为本，以核心素养为导向，进一步强调使学生获得数学“四基”即基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验发展，发展运用数学知识与方法“四能”即发现问题的能力、提出问题的能力、分析问题的能力和解决问题的能力，形成正确的情感、态度和价值观。

24. 【答案】启发式、探究式、参与式、互动式、大单元、跨学科的主题式学习和项目式学习

【格木解析】新课程倡导改变单一讲授式教学方式，注重启发式、探究式、参与式、互动式等，探索大单元教学，积极开展跨学科的主题式学习和项目式学习等综合性教学活动。

25. 【答案】结构化整合、核心素养

【格木解析】课程内容组织的重点应是对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径。

26. 【答案】过程与结果、直观与抽象、直接经验与间接经验

【格木解析】小学数学课程内容的组织应重视数学结果的形成过程，处理好过程与结果的关系；重视数学内容的直观表述，处理好直观与抽象的关系；重视学生直接经验的形成，处理好直接经验与间接经验的关系。

27. 【答案】跨学科主题学习、螺旋式

【格木解析】小学数学课程内容呈现应注重数学知识与方法的层次性和多样性，适当考虑跨学科主题学习；根据学生的年龄特征和认知规律，适当采取螺旋式的方式。

28. 【答案】学生学和教师教、学生、组织者、引导者与合作者

【格木解析】有效的教学活动是学生学和教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

29. 【答案】认真听讲、动手实践

【格木解析】学生的学习应是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等是学习数学的重要方式。

30. 【答案】启发式、发现问题、提出问题、分析问题和解决问题

【格木解析】教学活动应注重启发式，激发学生学习兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑问难，引导学生在真实情境中发现问题和提出问题。利用观察、猜测、实验、计算、推理、验证、数据分析、直观想象等方法分析问题和解决问题。

31. 【答案】学习结果、学习过程、教师教学

【格木解析】小学数学教学评价不仅要关注学生数学学习结果，还要关注学生数学学习过程，激励学生学习，改进教师教学。

32. 【答案】学业质量、核心素养

【格木解析】学业质量是学生在完成课程阶段性学习后的学业成就表现，反映核心素养要求。学业质量标准是以核心素养为主要维度，结合课程内容，对学生学业成就具体表现特征的整体刻画。

33. 【答案】会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界

【格木解析】小学数学课程要培养的学生核心素养，主要包括三个方面，会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界。

34. 【答案】抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识

【格木解析】义务教育阶段，数学眼光主要表现为抽象能力、几何直观、空间观念与创新意识。

35. 【答案】整体性、一致性和阶段性

【格木解析】小学数学核心素养具有整体性、一致性和阶段性，在不同阶段具有不同表现。

36. 【答案】数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识

【格木解析】《数学课程标准》学生的数学语言主要表现为：数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识。

37. 【答案】运算能力、推理意识或推理能力

【格木解析】在义务教育阶段，数学思维主要表现为运算能力、推理意识或推理能力。

38. 【答案】好奇心和求知欲、数学的信心、学习习惯

【格木解析】通过小学数学学习，学生能够对数学具有好奇心和求知欲，了解数学的价值，欣赏数学美，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。

39. 【答案】四、1~2年级、3~4年级、5~6年级、7~9年级

【格木解析】为体现义务教育数学课程的整体性与发展性，根据学生数学学习的心理特征和认知规律，将九年的学习时间划分为四个学段。分别是1~2年级为第一学段，3~4年级为第二学段，为5~6年级第三学段，7~9年级为第四学段。

40. 【答案】符号意识和运算能力

【格木解析】在第一学段教学目标中，让学生经历简单的数的抽象过程，认识万以内的数，能进行简单的整数四则运算，形成初步的数感、符号意识和运算能力。

41. 【答案】数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践

【格木解析】小学数学课程内容是由数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个学习领域组成。

42. 【答案】跨学科主题、主题式学习、项目式学习

【格木解析】综合与实践以培养学生综合运用所学知识和方法解决实际问题的能力为目标，根据不同学段学生特点，以跨学科主题学习为主，适当采用主题式学习和项目式学习的方式，设计情境真实、较为复杂的问题，引导学生综合运用数学学科和跨学科的知识与方法解决问题。

43. 【答案】数与运算和数量关系

【格木解析】数与代数是义务教育阶段学生数学学习的重要领域，在小学阶段包括数与运算和数量关系两个主题。

44. 【答案】数感、量感、推理意识

【格木解析】小学数学学习阶段，核心素养的主要表现为数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识等11个方面。

45. 【答案】数感

【格木解析】数感主要是指对于数与数量、数量关系及运算结果的直观感悟。

46. 【答案】可测量属性、大小关系

【格木解析】量感主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知。

47. 【答案】推理能力

【格木解析】推理能力主要是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题或结论的能力。

48. 【答案】模型意识

【格木解析】模型意识主要是指对数学模型普适性的初步感悟。

49. 【答案】图形的认识与测量和图形的位置与运动

【格木解析】图形与几何在小学阶段包括图形的认识与测量和图形的位置与运动两个主题。学段之间的内容相互关联，螺旋上升，逐段递进。

50. 【答案】数据分类、数据的收集、整理与表达和随机现象发生的可能性。

【格木解析】小学阶段的统计与概率包括的主题有数据分类、数据的收集、整理与表达和随机现象发生的可能性。

51. 【答案】主题式学习

【格木解析】综合与实践主要包括主题活动和项目学习等。小学阶段主要采用主题式学习。

52. 【答案】融合

【格木解析】促进信息技术与数学课程融合，合理利用现代信息技术，提供丰富的学习资

源，设计生动的教学活动，促进数学教学方式方法的变革。

53. 【答案】教学目标、整体性、阶段性

【格木解析】教学目标的确定要充分考虑核心素养在数学教学中的达成。教学目标的设定要体现整体性和阶段性。

54. 【答案】四基、四能

【格木解析】四基和四能是发展学生核心素养的有效载体。

55. 【答案】教学目标、核心素养

【格木解析】教学内容是落实教学目标、发展学生核心素养的载体。

56. 【答案】基本思想、数学基本活动经验

【格木解析】数学课程内容的选择应符合学生的认知规律，有助于学生理解、掌握数学的基础知识和基本技能，形成数学基本思想，积累数学基本活动经验，发展核心素养。

57. 【答案】课时、单元整体

【格木解析】改变过于注重以课时为单位的教学设计，推进单元整体教学设计，体现数学知识之间的内在逻辑关系，以及学习内容与核心素养表现的关联。

58. 【答案】实际问题、跨学科主题学习、真实问题、主题活动、项目学习

【格木解析】综合与实践领域的教学活动，以解决实际问题为重点，以跨学科主题学习为主，以真实问题为载体，适当采取主题活动或项目学习的方式呈现，通过综合运用数学和其他学科的知识与方法解决真实问题，着力培养学生的创新意识、实践能力、社会担当等综合品质。

59. 【答案】育人导向、以评促学、以评促教、教学评价、学业水平考试

【格木解析】发挥评价的育人导向作用，坚持以评促学、以评促教。主要分为教学评价和学业水平考试。

60. 【答案】书面测验、口头测验、成长记录

【格木解析】评价方式应包括书面测验、口头测验、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、成长记录等，可以采用线上线下相结合的方式。

61. 【答案】结果目标、掌握、运用、过程目标、经历、体验、感悟

【格木解析】课程描述行为动词共有两类，一类是描述结果目标的行为动词，包括了解、理解、掌握、运用等；另一类是描述过程目标的行为动词，包括经历、体验、感悟、探索、等。

62. 【答案】具体实例、辨认、举例

【格木解析】了解是指从具体实例中知道或举例说明对象的有关特征；根据对象的特征，从具体情境中辨认或举例说明对象。

63. 【答案】体验

【格木解析】体验是有目的地参与特定的数学活动，验证对象的特征，获得一些具体经验。

64.【答案】核心素养、育人价值

【格木解析】课程目标的确定，立足学生核心素养发展，集中体现数学课程育人价值。

65.【答案】启发式

【格木解析】教学活动应注重启发式，激发学生学习兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑问难，引导学生在真实情境中发现问题和提出问题。

三、简答题

1.【格木解析】

(1) 确立核心素养导向的课程目标 (2) 设计体现结构化特征的课程内容 (3) 实施促进学生发展的教学活动 (4) 探索激励学习和改进教学的评价 (5) 促进信息技术与数学课程融合。

2.【格木解析】

量感主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知。

(1) 知道度量的意义，能够理解统一度量单位的必要性；
(2) 会针对真实情境选择合适的度量单位进行度量，会在同一度量方法下进行不同单位的换算；

(3) 初步感知度量工具和方法引起的误差，能合理得到或估计度量的结果。建立量感有助于养成用定量的方法认识和解决问题的习惯，是形成抽象能力和应用意识的经验基础。

3.【格木解析】

(1) 获得适应未来生活和进一步发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

(2) 体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，在探索真实情境所蕴含的关系中，发现问题和提出问题，运用数学和其他学科的知识与方法分析问题和解决问题。

(3) 对数学具有好奇心和求知欲，了解数学的价值，欣赏数学美，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。

4.【格木解析】

数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识。

5.【格木解析】

- (1) 重视数学结果的形成过程，处理好过程与结果的关系
- (2) 重视数学内容的直观表述，处理好直观与抽象的关系
- (3) 重视学生直接经验的形成，处理好直接经验与间接经验的关系

6. 【格木解析】

- (1) 会用数学的眼光观察现实世界
- (2) 会用数学的思维思考现实世界
- (3) 会用数学的语言表达现实世界

7. 【格木解析】

- (1) 可以从现实世界的客观现象中发现数量关系与空间形式，提出有意义的数学问题。
- (2) 能够抽象出数学的研究对象及其属性，形成概念、关系与结构。
- (3) 能够理解自然现象背后的数学原理，感悟数学的审美价值。
- (4) 形成对数学的好奇心与想象力，主动参与数学探究活动，发展创新意识。

8. 【格木解析】

- (1) 数感
- (2) 量感
- (3) 符号意识

9. 【格木解析】

- (1) 学生能够理解数学基本概念和法则的发生与发展，数学基本概念之间、数学与现实世界之间的联系
- (2) 能够合乎逻辑地解释或论证数学的基本方法与结论，分析、解决简单的数学问题和实际问题
- (3) 能够探究自然现象或现实情境所蕴含的数学规律，经历数学“再发现”的过程
- (4) 发展质疑问难的批判性思维，形成实事求是的科学态度，初步养成讲道理、有条理的思维品质，逐步形成理性精神。

10. 【格木解析】

一共 11 个方面：数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识。

11. 【格木解析】

- (1) 获得适应未来生活和进一步发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。
- (2) 体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，在探索真实情境所蕴含的关系中，发现问题和提出问题，运用数学和其他学科的知识与方法分析问题和解决问题。
- (3) 对数学具有好奇心和求知欲，了解数学的价值，欣赏数学美，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。

12. 【格木解析】

数学为人们提供了一种描述与交流现实世界的表达方式。

- (1) 数学语言可以简约、精确地描述自然现象、科学情境和日常生活中的数量关系与空间形式；
- (2) 数学语言能够在现实生活与其他学科中构建普适的数学模型，表达和解决问题；
- (3) 数学语言能够理解数据的意义与价值，会用数据的分析结果解释和预测不确定现象，形成合理的判断或决策
- (4) 学生形成数学的表达与交流能力，发展应用意识与实践能力

13. 【格木解析】

“数量关系”主要是用符号（包括数）或含有符号的式子表达数量之间的关系或规律。学生经历在具体情境中运用数量关系解决问题的过程，感悟加法模型和乘法模型的意义，提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力，形成模型意识和初步的应用意识。

14. 【格木解析】

符号意识主要是指能够感悟符号的数学功能。知道符号表达的现实意义；能够初步运用符号表示数量、关系和一般规律；知道用符号表达的运算规律和推理结论具有一般性；初步体会符号的使用是数学表达和数学思考的重要形式。符号意识是形成抽象能力和推理能力的经验基础。

15. 【格木解析】

- (1) 空间观念主要是指对空间物体或图形的形状、大小及位置关系的认识。
- (2) 能够根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；
- (3) 想象并表达物体的空间方位和相互之间的位置关系；
- (4) 感知并描述图形的运动和变化规律。

空间观念有助于理解现实生活中空间物体的形态与结构，是形成空间想象力的经验基础。

16. 【格木解析】

数据观念主要是指对数据的意义和随机性有比较清晰的认识。知道数据蕴含着信息，需要根据问题的背景和所要研究的问题确定数据收集、整理和分析的方法；知道可以用定量的方法描述随机现象的变化趋势及随机事件发生的可能性大小。形成数据观念有助于理解和表达生活中随机现象发生的规律，感知大数据时代数据分析的重要性，养成重证据、讲道理的科学态度。

17. 【格木解析】

第一类，融入数学知识学习的主题活动。在这类活动中，学生将学习和理解数学知识，感悟知识的意义，主要涉及量、方向与位置、负数等知识的学习。

第二类，运用数学知识及其他学科知识的主题活动。在这类活动中，学生将综合运用数学

知识解决问题，体会数学知识的价值，以及数学与其他学科的关联。

18. 【格木解析】

知道中国在秦朝统一了度量衡，指导学生查阅资料，理解度量衡的意义，知道最初的度量方法都是借助日常用品，加深对量和计量单位的理解，丰富并发展量感。

19. 【格木解析】

(1) 以结构化数学知识主题为载体，在形成与发展“四基”的过程中所形成的抽象能力、推理能力、运算能力、几何直观和空间观念等。

(2) 从学生熟悉的生活与社会情境，以及符合学生认知发展规律的数学与科技情境中，在经历“用数学的眼光发现和提出问题，用数学的思维与数学的语言分析和解决问题”的过程中所形成的模型观念、数据观念、应用意识和创新意识等。

(3) 学生经历数学的学习运用、实践探索活动的经验积累，逐步产生对数学的好奇心、求知欲，以及对数学学习的兴趣和自信心，初步养成独立思考、探究质疑、合作交流等学习习惯，初步形成自我反思的意识。

20. 【格木解析】

(1) 丰富教学方式

改变单一讲授式教学方式，注重启发式、探究式、参与式、互动式等，探索大单元教学，积极开展跨学科的主题式学习和项目式学习等综合性教学活动。

(2) 重视单元整体教学设计

改变过于注重以课时为单位的教学设计，推进单元整体教学设计，体现数学知识之间的内在逻辑关系，以及学习内容与核心素养表现的关联。

(3) 强化情境设计与问题提出

注重发挥情境设计与问题提出对学生主动参与教学活动的促进作用，使学生在活动中逐步发展核心素养，注重创设真实情境，重视设计合理问题。

21. 【格木解析】

在关注“四基”“四能”达成的同时，特别关注核心素养的相应表现。

(1) 不仅要关注学生知识技能掌握，还要关注学生对基本思想的把握、基本活动经验的积累；

(2) 不仅关注学生分析问题、解决问题的能力，还要关注学生发现问题、出问题的能力。全面考核和评价学生核心素养的形成和发展。

22. 【格木解析】

(1) 坚持素养立意，凸显育人导向。

(2) 遵循课标要求，严格依标命题。

(3) 规范命题管理，加强质量监测。

23. 【格木解析】

- (一) 坚持目标导向
- (二) 坚持问题导向
- (三) 坚持创新导向

24. 【格木解析】

课程内容组织。重点是对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径。重视数学结果的形成过程，处理好过程与结果的关系；重视数学内容的直观表述，处理好直观与抽象的关系；重视学生直接经验的形成，处理好直接经验与间接经验的关系。

25. 【格木解析】

有效的教学活动是学生学和教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

学生的学习应是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等是学习数学的重要方式。教学活动应注重启发式，激发学生学习兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑问难，引导学生在真实情境中发现问题和提出问题，利用观察、猜测、实验、计算、推理、验证、数据分析、直观想象等方法分析问题和解决问题；促进学生理解和掌握数学的基础知识和基本技能，体会和运用数学的思想与方法，获得数学的基本活动经验；培养学生良好的学习习惯，形成积极的情感、态度和价值观，逐步形成核心素养。

26. 【格木解析】

口算和估算教学直接关系着学生对数学基础知识和基本技能的掌握，关系着学生观察、记忆、注意、思维等能力的发展，关系着学生学习习惯、情感、意志等非智力因素的培养。口算是笔算、估算的基础，笔算和估算能力是在准确、熟练的口算能力的基础上发展起来的，没有一定的口算基础，笔算、估算能力的培养就成了无源之水。由于估算通过口算进行的，是口算技能的灵活应用，所以估算在培养学生计算方法上有重要作用。

综上，数学学习中算法多样性，有利于全体学生的参与，也有利于因材施教、发现每个学生的潜能，更有利于学生主体地位的体现，自信心得以增强，特别有利于拓展学生的思维，激发创新灵感。

27. 【格木解析】

评价不仅要关注学生数学学习结果，还要关注学生数学学习过程，激励学生学习，改进教师教学。通过学业质量标准的构建，融合“四基”“四能”和核心素养的主要表现，形成阶段性评价的主要依据。采用多元的评价主体和多样的评价方式，鼓励学生自我监控学习的过程和结果。

28. 【格木解析】

数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系，培养学生的数感，要让学生通过丰富多彩的生活情境去感知、去体验。

首先，在估算过程中训练数感。《标准》中指出：对具体数量的感知与体验是学生建立数感的基础，教师组织估数活动，使学生观察、体会数的情境，结合现实素材感受数的意义，对数量作出较准确的判断，能有效地训练学生的数感。

其次，比较中发展学生数感。在具体的情境中把握数的相对大小关系，不仅是理解数的需要，同时也会加深学生对数的实际意义的理解，使学生在比较中有了多、少、多一些、少一些、几倍的认识，使数感得到发展。

再次，在体验中建立数感。数学来源于生活，发展学生的数感离不开学生的生活经验，让学生在学习的过程中，更多的接触有关经历和实例，在现实背景下感受和体验，会使学生更深刻的理解和把握概念，建立数感。

最后，进入生活情境培养数感。数感的另一个含义是在实际情境中把握运算的意义。教师在教学中创设一些问题情境，让学生结合具体的问题选择恰当的算法，会增强学生对运算实际意义的理解，培养数感。

29. 【格木解析】

(1) 数学是研究数量关系和空间形式的科学。在新课程改革中，《标准》明确强调数学学习应“从学生已有的生活经验出发，让学生亲身经历将实际问题抽象成数学模型并进行解释与应用的过程，进而使学生获得对数学理解的同时，在思维能力、情感态度与价值观等多方面得到进步和发展”，并且提出了“数学来源于生活，更要回归生活”的基本理念。

①培养学生的应用意识促进了数学教学改革。加强应用意识是教育改革的需要，数学是寓于现实、用于现实，数学教育应该通过具体的问题来传授抽象的数学内容，应该从学习者所经历、所接触的客观实际中提出问题，然后升华为数学概念、运算法则或数学思想。因此，数学教学必须加强应用意识，才能显露数学教育的本色。

②培养学生的应用意识促进了时代的发展。过去的课程内容陈旧，知识面窄。当今世界，随着社会的进步，现代科学技术的高速发展带动了信息时代的到来。在这样一个时代，数学出现了技术化的倾向，它的全方位渗透，正日益转化为人们在生产和日常生活中所必须具备的技术手段和工具，社会对数学应用的需求和数学的社会化功能，是当今时代的一个突出的特点。

(2) 培养学生数学应用意识可以从以下几方面开展：

①注重数学知识的来龙去脉；

②面对实际问题时，能主动尝试着从数学的角度运用所学知识和方法寻求解决问题的策略；

- ③面对新的数学知识时，能主动地寻找其背景，并探求其应用价值；
- ④鼓励学生从数学的角度描述客观事物与现象，寻找其中与数学有关的因素；
- ⑤搜集数学应用的事例，加深对数学应用的理解和体会。

总之，除了教师要努力为学生应用所学知识创造条件和机会外，还应该鼓励学生自己主动在现实中寻找用数学知识和数学思想方法解决问题的机会，并努力去实践，面对现实问题，学生能够主动从数学的角度进行分析并探索解决方案，也是数学教学中培养学生应用意识的根本所在。教师要积极地创造条件，在课堂中为学生创设生动有趣的情境来启发诱导，在课外要积极应用数学知识解决实际问题，激发学生强烈的求知欲，让学生自主探索，发现问题、解决问题，享受创造的乐趣，获得成功的喜悦，真正成为学习的主人。

30. 【格木解析】

(1) 几何直观主要是指利用图形描述和分析问题。借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果。几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用。

(2) 在教学中可以用画几何直观图的方法来解决实际问题。如在教学面积计算的问题时，可以先向学生呈现纯文字的例题，接着鼓励学生尝试画草图，让学生的思维集中于用画图来表达题意，并通过师生交流，进一步完善画出的示意图，使学生感受到画图能清楚地理解题意，然后借助示意图分析数量关系，明确先求什么，再求什么，列式解答后，要再结合算式和图说说解题思路，最后反思整个解题的过程，突出示意图对解决这个数学问题的重要作用，感受画图策略的价值。又如一些计算题的运算，在认真审题的基础上，通过出示直观图，巧妙借助几何直观，把复杂的计算问题转化成简单的计算问题。

31. 【格木解析】

同意。

创新是指：以现有的思维模式提出有别于常规或常人思路的见解为导向，利用现有的知识和物质，在特定的环境中，本着理想化需要或为满足社会需求，而改进或创造新的事物、方法、元素、路径、环境，并能获得一定有益效果的行为。“创新”在“基础”之上，才是“创新”，不然就是空想。

数学教育既要使学生掌握现代生活和学习中所需要的数学知识与技能，更要发挥数学在培养人的思维能力和创新能力方面的不可替代的作用。新课程总目标提出，获得适用社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力。了解数学的价值，提高学习数学的兴趣，增强学好数学的信心，养成良好的学习习惯，具有初步的创新意识和科学态度。

在数学教学中，要注重学生对基础知识、基本技能的理解和掌握。“知识技能”既是学生发展的基础性目标，又是落实“数学思考”“问题解决”“情感态度”目标的载体。数学知识的教学，应注重学生对所学知识的理解，体会数学知识之间的关联。数学知识的教学，要注重知识的“生长点”与“延伸点”，把每堂课教学的知识置于整体知识的体系中，注重知识的结构和体系，处理好局部知识与整体知识的关系，引导学生感受数学的整体性，体会对于某些数学知识可以从不同的角度加以分析、从不同的层次进行理解。在基本技能的教学中，不仅要使学生掌握技能操作的程序和步骤，还要使学生理解程序和步骤的道理。例如，对于整数乘法计算，学生不仅要掌握如何进行计算，而且要知道相应的算理；对于尺规作图，学生不仅要知道作图的步骤，而且要能知道实施这些步骤的理由。

在我国传统的数学教育中，由于过分强调统一的数学基础，忽视了学生的个性和创造能力的培养，致使学生产生“基础过剩”的现象，而导致创新意识失落、创新能力低下。因此，外卖不能仅仅把“重视基础”或者“创新”作为数学教学的关键。一个科学的数学教育理论，必须把“基础”和“创新”这两个方面同时加以研究。没有基础的创新是空想，没有创新指导的“打基础”是傻练。基础要为发展服务，盲目地打基础，过量的练习是无效的劳动。强调数学基础需要把握适当的“度”。“以学生的发展为本”，把数学基础和数学创新放在一起进行研究，找出适度的平衡。

32. 【格木解析】

(1) 所谓数学概念形成，是指在教学条件下，从大量的实际例子出发，经过比较、分类，从中找出一类事物的本质属性，然后再通过具体的例子对所发现的属性进行检测，最后通过概括得到定义并用符号表达出来。这种获得数学概念的方式叫做数学概念形成。

(2) 数学概念形成的过程可以分为以下几个阶段：观察实例-分析共同属性-抽象本质属性-确认本质属性-概括定义-具体运用。

33. 【格木解析】

数学课堂教学提问的设计原则：

- (1) 目的性原则；
- (2) 启发性原则；
- (3) 可及性原则；
- (4) 适量性原则；
- (5) 及时性原则；
- (6) 层次性原则；
- (7) 全体性原则；
- (8) 及时评价原则。

第二章 教学论

一、选择题

1. 【答案】C
2. 【答案】B
3. 【答案】D
4. 【答案】D
5. 【答案】C
6. 【答案】B
7. 【答案】C
8. 【答案】C
9. 【答案】C
10. 【答案】A
11. 【答案】D
12. 【答案】A

二、填空题

1. 【答案】全面、持续、和谐地发展。
2. 【答案】数学课程标准。
3. 【答案】定义法；描述法。
4. 【答案】数学专业知识。
5. 【答案】属差。
6. 【答案】正迁移；负迁移。
7. 【答案】有价值；必需；不同。
8. 【答案】严密的逻辑性。
9. 【答案】数学思考。
10. 【答案】空间观念。
11. 【答案】教学目标。
12. 【答案】情感因素。
13. 【答案】谈话法。
14. 【答案】直观行动。
15. 【答案】质量单位。
16. 【答案】可能性。

17. 【答案】直觉和灵感。
18. 【答案】两；三。
19. 【答案】备课；备好课。
20. 【答案】能否达到“守恒”。
21. 【答案】过程；信心。
22. 【答案】动手实践。
23. 【答案】概念、判断和推理。
24. 【答案】中位数。
25. 【答案】现实。
26. 【答案】实践与综合应用。
27. 【答案】引导者。

三、简答题

1. 【格木解析】

(1) 教学目标评价。 (2) 教学内容评价。 (3) 教学过程评价。 (4) 教学方法评价。 (5) 教学素质评价。 (6) 教学效果评价。 (7) 教学特色评价。

2. 【格木解析】

教学目标具体化原则。重视认知建构过程原则。信息交流多向性原则。教学方法整体优化原则。信息反馈调控原则。知情交融原则。时控性原则。

3. 【格木解析】

小学数学教学内容选取有三大依据：(1) 选取有价值的数学。(2) 选取每个学生都能够掌握的数学。(3) 选取有弹性的数学。

4. 【格木解析】

小学生数学学习的主要特点：(1) 小学生学习数学是他们生活常识的系统化，是建立在经验基础上的一个主动建构的过程。(2) 数学学习是学生自己的活动过程，是一个“做数学”的过程。(3) 小学生学习数学是一个思考过程。“思考”是学生学习数学认知过程的本质特点，是数学知识的本质特征。(4) 学生学习数学是一个有指导的再创造的过程，是一个多样化的、富有个性的过程。“经验”、“活动”、“思考”、“再创造”是小学生数学学习的四个基本要素。学生是数学学习活动的主体，思考是它的本质。

5. 【格木解析】

小学数学教学过程的实质是：(1) 教师引导学生进行数学活动的过程。(2) 教师和学生之间、学生和学生之间互动的过程。(3) 师生共同发展的过程。

6. 【格木解析】

“空间与图形”的教育价值是：(1)有助于学生更好地认识和理解人类的生存空间。(2)有助于培养学生的创新精神。(3)有助于学生获得必需的知识和必要的技能，并初步发展空间观念、学会推理。有助于促进学生全面、持续、和谐的发展。

7. 【格木解析】

首先，信息反馈要及时、准确。其次，信息反馈要全面、多向。最后，信息反馈要经济、高效。

8. 【格木解析】

小学数学教学的评价应遵循以下原则：(1)注重对学生数学学习过程的评价，强调学生个体过去与现在的比较。(2)恰当评价学生基础知识和基本技能的理解和掌握，应将学段目标作为学段结束时应达到的目标来评价。(3)重视对学生发现问题和解决问题能力的评价。(4)评价的主体和方式要多样化。(5)评价结果的呈现以定性描述为主，应采用鼓励性的语言。

9. 【格木解析】

教学方法改革的指导思想是：(1)在教学目标上，应强调以学生发展为本，使学生在知识技能、数学思考、解决问题、情感态度价值观等多方面均衡发展。(2)在学习过程上，应强调学生的活动和“再创造”。(3)在教与学的关系上，应强调学生的主体性，教师是数学学习的组织者、引导者与合作者。(4)在教法选择上，应强调多法配合，提高整体功能。

10. 【格木解析】

通过义务教育阶段的数学学习，学生能够：获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识（包括数学事实、数学活动经验）以及基本的数学思想方法和必要的应用技能；初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会，去解决日常生活中和其他学科学习中的问题，增强应用数学的意识；体会数学与自然及人类社会的密切联系，了解数学的价值，增进对数学的理解和学好数学的信心；具有初步的创新精神和实践能力，在情感态度和一般能力方面都能得到充分发展。

11. 【格木解析】

运用谈话法要注意以下问题：(1)谈话前要首先设计好所提的问题。(2)谈话时要面向全体学生。(3)谈话后教师要小结。(4)要注意创造谈话的民主气氛。

12. 【格木解析】

(1)问题解决指的是学生初次遇到的新问题。(2)问题解决的方法和途径是新的。(3)问题解决的方法和途径可以包括内隐的和外显的操作活动两个方面。(4)问题一旦解决，学生通过问题解决的过程所获得的新的方法、途径和策略再去解决其他问题，就不再是问题解决了。

13. 【格木解析】

(1)既重视学习结果，更要重视学习过程。数学学习是学生主动地建构数学知识的过程，

教师的教只有通过学生的学才能起作用，教师不仅要注意学生学到了什么，还要重视他们是怎样学的。要使学生在教师的引导下，通过自己的探索、思考，从已知到未知，从感性到理性，掌握数学知识，形成数学能力。(2)要合理地组织教学过程，恰当地运用教学方法。数学知识是抽象的。在学习初级概念时，要运用实物、教具、学具，让学生动手、动口、动脑，在感知的基础上由具体到抽象，形成概念。对于教材中的重点，要在学习新课时紧扣重点，练习时围绕重点，时间上保证重点，使学生切实掌握。(3)要培养学生组织自己智力活动的自觉性。要培养学生肯于思考、善于思考的良好习惯。要在学生获取知识的同时教给他们观察、记忆、思考等方法，这些都能改善学生的智力活动，从而使他们会把自己的学习策略做出评价，培养组织自己智力活动的自觉性。

14. 【格木解析】

小学生掌握分数的概念需要一个长期的、不断深化的过程：第一阶段，结合生活实例和直观手段，使学生初步认识分数。第二阶段，借助直观图形和生活中的实例帮助学生理解单位“1”、“平均分”、“份”等概念，初步理解分数的意义。最后通过几个人的几分之几等案例，让学生理解单位“1”的确切含义，在此基础上就可以初步理解分数的定义：把单位“1”平均分成若干份，表示其中的一份或几份的数叫做分数。第三阶段，通过分数四则计算，加深对分数意义的理解，巩固分数概念。最后，结合四则运算的性质，让学生理解分数表示一个整数除以一个非零自然数的商，这样就把分数的概念纳入到原有的认知结构之中。

15. 【格木解析】

(1) 教育与学习理论方面的依据。数学与相关学科方面的依据。制定小学数学课程目标必须体现数学学科的性质和特点。(2) 儿童心理学方面的依据。儿童的年龄特征和认知发展水平是制定小学数学课程目标时必须考虑的另一个重要因素。

16. 【格木解析】

此原则是指教师要引导学生对自己生活中的数学现象进行“数学化”的解读，从而实现学生自我对数学认知结构的建构。贯彻此原则的要求：(1) 引导学生从生活情境中发现蕴含的数学问题，分析并抽取其中的数学因素。(2) 用形象化或图式化的形式进行描述并寻找和发现其之间的关系或规律。(3) 运用数学符号表示关系或规律，并在应用中完善。

17. 【格木解析】

(1) 能使学生体会到数学与现实生活的紧密联系，认识到数、符号是刻画现实世界数量关系的重要语言，方程、不等式与函数是现实世界的数学模型，从而认识到数学是解决实际问题和进行交流的重要工具，从中感受到数学的价值，初步学会运用数学的思维方式去观察、分析现实社会，去解决日常生活和其他学科学习中的问题，增强应用意识，培养初步的应用能力。(2) 在数与代数的学习过程中，通过对现实世界中的数量关系及其变化规律的探索，数的概

念的建立、扩充以及数的运算，公式的建立和推导，方程的建立和求解，函数关系的探究等活动，促进学生对数学学习的兴趣，提高解决问题的能力和自信心，培养学生初步的创新意识和发现能力。（3）在数与代数中，不仅知识中存在着对立和统一，而且研究过程中也充满了对立与统一。同时，在变量和函数的研究中还充满着运动、变化的思想，而且在数与代数的其他部分的研究中，从运动和变化的观点来考察，也能使认识更加深刻。因此，这部分内容的学习，必将有助于培养学生的辩证唯物主义观点，有利于学生用科学的观点认识现实世界。

18. 【格木解析】

（1）学科数学与科学数学紧密联系，相互影响，相互作用。科学数学对学科数学的制约。学科数学对科学数学的影响。（2）学科数学与科学数学的区别。学科数学与科学数学的区别随着数学教育的层次不同而不同，从小学数学看，其与科学数学具有以下区别目的不同。形式不同。顺序不同。认识的起点（基础）不同。由上所述，科学数学是作为人类认识的结果而呈现的，而学科数学可视为认识对象而存在。

19. 【格木解析】

小学生计算出现错误心理方面的原因主要体现在以下方面：（1）感知比较粗略。（2）情感比较脆弱。（3）注意不够稳定。（4）思维定势干扰。（5）短时记忆较弱。

20. 【格木解析】

在教学中要采取有效的方法帮助学生理解概念。首先，利用变式突出概念的本质属性。例如，教学整除概念时，应通过具体例子引出概念。其次，对概念要进行多层次的抽象概括。再次，通过反面衬托进一步理解概念的本质属性。第四，通过多层次的概括后，要用简练的语言对概念进行描述。最后，要注意和相近的、易混的概念比较。

第三章 案例分析

1. 【格木解析】

(1) 第一种是错误的，因为第一种将化简比与化简比值这两个概念混淆了，第一种求出的是比值，而化简比例，当分母为1时需要保留，化简比例结果不可以是整数或带分数。

(2) 教学课程内容的组织要注重过程，处理好过程和结果的关系。在进行化简比例的教学中，不仅要告诉学生比和比值有区别，而且要讲清楚有哪些区别，他们各自是怎么得来的，又该如何表示。

2. 【格木解析】

(1) 在计算异分母分数加法时，学生混淆了异分母分数加法的计算原理。应该是当分母一样的时候，分子相加，分母不变，而不是分子分母同时相加。

(2) 教师的教学活动应当建立在学生已有的经验为基础，面向全体学生，注重因材施教。在异分母加减过程中，应当联系到已学的同分母相加减。另外，可结合直观图讲解异分母加减法的计算原理，便于学生直观理解。

3. 【格木解析】

(1) 错误：不等式两边同时乘以 $(x-2)$ 时，忘记考虑这个式子整体符号。

原因：对不等式性质不熟悉，不等式两边同时乘以一个负数时不等号方向会改变。

(2) 教学课程的内容不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的思想方法。可以在讲不等式性质时，举例易错解法，抓住关键点。教学活动是师生积极参与，交往互动，共同发展的过程。在进行不等式的教学时，要保持和学生的交流，及时帮助他们复习之前学过的知识：等式的性质，注意两者区分。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、自主探索、合作交流。帮助学生总结不等式常用的几个性质，举例相对应每个性质的重点应用。

4. 【格木解析】

(1) 应渗透的数学思想有：

①数形结合的数学思想：通过图形让学生明确分数除以整数的意义与整数除法的意义相同，都是把一个数平均分成几份，求一份是多少。

②转化的数学思想：把分数除以整数转化为分数平均分的思想。

(2) 教学难点：对分数除以整数的算理理解。教材通过数形结合思想，将除法计算转化为平均分的问题，便于学生理解算理。

(3) 第二种算法更具有一般性。原因是：如果分数的分子变为一个奇数，把奇数分成2

份的话，这种算法学生不会转化，在具体实施过程中会出现错误，而第二种解法，给出的方法是将分数整体平均分，当除数或者分数相应改变时，都可以相应变换变量，可以得出正确答案。

(4) 在学生理解了以上两种算法后，可以用变换例题中除数和被除数的数值，让学生体会变化过程中，哪一种转化方法更易于运用到实际题目中，让学生自己感受理解第一种算法的局限性。

5. 【格木解析】

(1) 以上教学片段中，教师先让学生独立思考，然后小组讨论，汇报计算的方法。新课程标准中，教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生的数学思考，鼓励学生的创造性思维；要注重培养学生良好的数学学习习惯，使学生掌握恰当的数学学习方法。学生学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程。认真听讲、积极思考、动手实践、自主探索与合作交流等，都是学习数学的重要方式。学生应当有足够的时间和空间经历观察、实验、猜想、计算、推理、验证等活动过程。

(2) 以上教学片段中，存在的问题有：

①小组讨论时，老师在发现大部分学生已完成的情况下结束，这里老师没有照顾到全体学生。新课标中，数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

②学生汇报计算方法之和，老师说“以后在计算两位数减一位数退位减法时，喜欢用什么方法就用什么方法做。今天我们一定要记住每种方法。”老师忽视了在教学中的主导作用，教师是学习的组织者、引导者与合作者，不能让学生喜欢用什么方法就用什么方法做。教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。教师要发挥主导作用，处理好讲授与学生自主学习的关系，引导学生独立思考、主动探索、合作交流，使学生理解和掌握基本的数学知识与技能，体会和运用数学思想和方法，获得基本的数学活动经验。

6. 【格木解析】

(1) 分析教材可知在小学三年级学习周长的概念时，已经学习封闭图形的一周即为周长，本案例中采用“谈话导入”的方法，借助学生已有基础知识，从“硬币”这样的小型物体到“花坛”乃至“吊扇”形成的圆引入圆的周长一般计算方法，把握直接经验和间接经验的关系。

(2) 数学源于生活、根植于生活，数学教学就要从学生的生活经验和已有的知识点出发，联系生活讲数学，把生活经验数学化，数学问题生活化。激发学生学习数学的兴趣，让学生深刻体会到生活离不开数学，数学是解决生活问题的钥匙，从而增强学习数学的趣味。

(3) 数学课堂通常被认为比较枯燥、缺乏生动和激情，因此要让学生自主探索、合作学习，在实践体验、实际生活中尝试到学习数学的乐趣，更重要的是使学生感受数学与生活的联系，即数学来自生活实际，数学又应用于生活、服务于生活。可从以下几点出发：

- ①例题生活化，体验、感受数学；
- ②导入生活化，创设情境，激发兴趣；
- ③教学生活化，产生亲切感；
- ④练习生活化，提高操作实践能力。

7. 【格木解析】

(1) 此教学片段落实了数感、运算能力、推理能力这三个数学核心概念。在新课标中，有十个数学核心概念：数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想、应用意识和创新意识。数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面感悟。建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系。教学中先提出计算某市的温度差，然后探究如何计算 $3 - (-3)$ ，探求新知，在这个过程中帮助学生树立数感。运算能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力，在教学片段中的推理运算过程培养了学生的运算能力，合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果。在教学片段中，探究减法变成加法，减去一个负数，减去一个正数，推理出有理数的减法法则，培养了学生的合情推理能力。

(2) 从教学片段可以看出，教师能很好地了解学生的学习起点，对学生的学习起点把握准确。教学方法合理，体现了“学生为主体，教师是组织者、引导者、合作者”的新课标理念。课程内容反映了社会的需要、数学的特点，符合学生的认知规律。课程内容的选择贴近学生的实际，有利于学生体验与理解、思考与探索。导入：某市某天的气温是 $-3^{\circ}\text{C} \sim 3^{\circ}\text{C}$ ，这天的温差是多少？列出算式 $3 - (-3)$ ，并对这个算式进行探究算法。课程内容的组织重视过程，处理好过程与结果的关系；重视直接经验，处理好直接经验与间接经验的关系。学生之前学习了加法和减法的意义，有理数的意义，在此基础上，引导学生探究有理数的减法法则，具体从减法变成加法，减去一个负数，减去一个正数，减去 0，归纳得出有理数的减法法则，整个过程由浅入深，层层深入，有利于帮助学生理解有理数减法法则。

教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。在教学片段中，教师提出问题，引导学生一步一步的探究新知，体现了学生是学习的主体，也体现了教师的主导作用。

(3) 教学过程的反思如下:

①了解学生,研究教材。这个教学内容需要学生具备正数、负数、零以及相反数的知识,学生对这些知识的掌握程度会直接影响学习有理数减法法则,在这些知识中,相反数是学生理解起来比较困难,因此教学过程中注意相反数在减法中的应用。本教学片段主要是掌握有理数减法法则,难点是对有理数减法的理解,在教学过程中,教师引导学生一步一步探究有理数的减法法则,最后归纳得出有理数的减法法则,突出重点,突破难点。

②教学是师生交往、积极互动、共同发展的过程。教学的实质是交往,师生相互合作、相互理解、相互补充,师生之间相互平等、相互尊重。教学是师生双方互动的过程。在教学过程中,教师提出问题,引导学生探究问题,体现了教师互动,但是在教学过程中对学生学习活动没有明确的体现。

③教学过程重于教学结果。教学过程中要重视客观真理,但更重视获得真理的过程。注重引导学生参与探索、归纳有理数减法法则的过程,主动获得知识。这样,学生在这节课上不仅学懂了法则,而且能感知到研究数学问题的一些基本方法。

8. 【格木解析】

(1) 落实的数学核心理念有:

①数形结合的思想:将平方差公式即代数知识,与几何内容联系在一起,使得学生更直观地理解平方差公式;

②转化的思想:把新知识转化为旧知识;

③符号化思想:平方差公式的表示,用字母表示 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 。

(2) 探究式教学理念是指老师在新知识的授课过程,起着引导的作用,发挥学生的主观能动性,学生自主探索的过程。本教学片段中有以下特色:

①引导学生,动手操作,大胆尝试用图像证明平方差公式,充分发挥学生的主观能动性;

②有难度的问题,学生间采用小组合作交流的方式,在合作中发现数学知识,感知数学的魅力;

③将代数知识与几何知识建立关系,对数学知识后续的学习起到很重要的作用。

(3) 反思:教师在教学过程中,要起到教师是组织者、引导者、合作者的作用,充分发挥学生的主观能动性,引导学生动手操作,小组间合作交流,尽量让学生能够在过程中掌握课程知识的重难点。将数学中重要的思想,包括数形结合、转化、函数与方程、分类、特殊到一般等思想贯穿在教学中,感受数学与生活的息息相关以及数学的魅力。

9. 【格木解析】

(1) 本课属于图形与几何的学习。数学可以分为数与代数,图形与几何,统计与概率,综合与实践。本课的学习有利于培养学平面和空间思维。

(2) 根据《义务教育数学课程标准》2022 版相关知识，我认为该老师的教学方式值得我们学习，理由如下：

①复习导入，点明主题。课程一开始该老师通过复习和三角形面积相关的旧知，引出“如何求出三角形的面积，就是本节课所要解决的问题。”直击主题，目的清晰，激发学生的求知欲。

②遵循了“教为主导，学为主体”的课程理念，在教学过程在该老师没有直接给出三角形的面积的计算公式，而是通过层层设问，步步深入，循序渐进的引导学生思考，由学生自己通过动脑思考，动手实践得出最终结果，能够增强学生的体验感和学习主动性，调动学生的学习积极性。

③运用启发式教学。该老师的提问能够启发学生的思维，引导学生思考，提的问题也在学生可以解决的范围内，做到了有效提问，精心设问，重视学生感知知识的过程，符合新课程的理念。

10. 【格木解析】

(1) 本课属于图形与几何的学习。数学可以分为数与代数，图形与几何，统计与概率，综合与实践。本课的学习有利于培养学平面和空间思维。

(2) 根据《义务教育数学课程标准》2022 版相关知识，我认为该老师的教学方式值得我们学习，理由如下：

①游戏导入，激发学习兴趣，营造轻松愉快的课堂氛围。“套圈游戏”具有趣味性，能激发学生的学习兴趣，让学生快速进入学习的状态，参与到课堂学习中，寓教于乐，顺势引出课题《圆的认识》，直击主题，目的清晰，激发学生的求知欲。

②运用启发式教学。让学生尝试画圆，再提问如何画圆，顺势引出今天的学具“圆规”，水到渠成，符合学生的认知规律，进而总结圆规画圆的方法，最后教师进行示范，体现了循序渐进的教学原则。既能锻炼学生动手实践与自主探究的能力，也能培养学生的合作交流能力，该老师的提问能够启发学生的思维，引导学生思考，提的问题也在学生可以解决的范围内，做到了有效提问，精心设问，重视学生感知知识的过程，符合新课程的理念。

③遵循了“教为主导，学为主体”的课程理念，在教学过程在该老师没有直接给出圆的特征，而是通过层层设问，步步深入，引导学生剪下画好的圆，折一折，量一量得出圆的特征，循序渐进的引导学生思考，由学生自己通过动脑思考，动手实践得出最终结果，能够增强学生的体验感和学习主动性，调动学生的学习积极性。

11. 【格木解析】

(1) 本课属于数与代数的学习。数学可以分为数与代数，图形与几何，统计与概率，综合与实践。本课的学习有利于培养学生数感、运算能力、符号意识，创新意识等。

(2) 根据《义务教育数学课程标准》2022 版相关知识, 我认为该老师的教学方式值得我们学习, 理由如下:

①情境导入, 通过创设带学生逛文具店的情境来激发学生的学习兴趣, 为学生创造了一个与教学内容相关的情境, 引导学生积极参与课堂, 帮助学生将所学知识应用到实际情境中, 提高知识的迁移能力。顺势引出课题《认识小数》, 直击主题, 目的清晰, 激发学生的求知欲。

②教学重结果更重过程。让学生尝试说说各种商品的单价, 再提问每本笔记本的价格是多少元? 是几元几角几分呢? 顺势引导学生将小数各个数位上的数与元、角、分一一对应起来。符合学生的认知规律, 体现了循序渐进的教学原则, 既能锻炼学生动手实践与自主探究的能力, 发展科学探究意识, 也能培养学生的合作交流能力, 符合新课程的理念。

③教学目标实现全面, 教师讲解小数名称的由来, 有利于学生学习中华文化, 增加民族自信, 实现情感态度价值观目标。

④重点突出, 教师给学生强调同一个数在不同数位上的不同意义; 小数中的“0”具有意义, 不可省略; 引导学生观察, 小数部分只有两位, 原因是人民币只有元、角、分这三个单位。

12. 【格木解析】

(1) 根据《义务教育数学课程标准》2022 版相关知识, 我认为该老师的教学方式值得我们学习, 理由如下:

①教学方法

情境教学法: 通过展示礼品盒包装这一生活情境引入课题, 让学生感受到数学知识与实际生活的紧密联系, 激发了学生的学习兴趣和解决问题的欲望。这种从生活问题出发的教学方式, 有助于提高学生运用数学知识解决实际问题的能力。

直观演示法: 利用长方体模型的展开图(实物或多媒体动画), 向学生直观地展示了长方体的表面积的构成, 使抽象的概念变得具体可感。学生能够清晰地看到长方体的个面以及它们之间的关系, 为理解表面积的计算方法奠定了基础。

小组合作探究法: 在探究长方体表面积计算方法的环节, 采用小组合作的方式, 充分发挥了学生的主体作用。学生在小组讨论中积极思考、交流, 通过自主探索得出表面积的计算公式, 培养了学生的合作能力、逻辑思维能力和探究精神。

练习法: 在公式应用和拓展变化环节, 通过大量的练习题, 让学生在不同的情境中运用所学知识进行计算, 加深了对长方体表面积计算方法的理解和掌握。同时, 课堂练习中的同桌互查和教师巡视指导, 能够及时反馈学生的学习情况, 帮助学生纠正错误, 提高学习效果。

②学生表现

在情境引入环节, 学生对礼品盒包装问题表现出浓厚的兴趣, 积极参与讨论, 提出了一些自己的想法, 如需要测量礼品盒的长、宽、高。这表明学生能够将实际问题与数学知识建立初

步的联系。

在小组探究过程中，大部分学生能够积极参与讨论，认真观察长方体展开图，尝试找出计算表面积的方法。在这个过程中，学生们展现出了较强的合作意识和探究能力，通过互相交流和启发，逐步理解了表面积的计算原理。

在公式应用和课堂练习环节，大部分学生能够根据公式正确计算长方体的表面积，但在面对一些特殊情况（如无盖长方体、通风管等）时，部分学生出现了理解困难和计算错误。这说明学生在知识迁移和灵活运用方面还有待提高，需要更多的练习和引导。

③教学效果

通过本节课的教学，大部分学生理解了长方体表面积的概念，掌握了其计算公式，并能在简单的情境中正确计算长方体的表面积。从课堂练习的反馈来看，学生对基本题型的掌握情况较好，达到了本节课的基本教学目标。

在能力培养方面，通过情境引入、小组探究和多样化的练习，学生的空间观念、逻辑思维能力、解决问题的能力和合作能力都得到了一定程度的锻炼和提高。特别是在理解长方体展开图与表面积的关系以及应对不同情境的计算问题时，学生的思维能力得到了拓展。

本节课为后续学习其他立体图形的表面积计算以及更复杂的数学应用问题打下了良好的基础，帮助学生建立了从实际问题抽象出数学模型并求解的思维模式。

（2）改进建议

①在小组探究环节，可以提前给小组明确一些讨论的方向和重点，如“如何根据长方体的特征来计算每个面的面积”“如何将6个面的面积计算简化为一个公式”等，这样可以使小组讨论更加高效和有针对性。

②在拓展与变化环节，可以增加一些小组讨论或小组竞赛的形式，激发学生的学习热情。例如，给出几种不同类型的特殊长方体表面积计算问题，让小组讨论并比赛看哪个小组能最快最准确地完成，这样可以进一步提高学生的参与度和对知识的灵活运用能力。

③在课堂练习环节，可以针对学生容易出错的问题（如无盖长方体计算时忘记减去一个面的面积）设计一些专项练习，加强学生对易错点的理解和记忆，提高计算的准确性。同时，可以鼓励学生自己尝试出题并互相解答，加深对知识的理解和应用。

13. 【格木解析】

（1）设计意图：通过例1的教学能够引导学生体会：①了解提公因式法分解因式的基本程序和步骤；②积累找公因式的经验：找到公因式的最简单的方法是找出多项式各项系数的最大公约数和各项都含有的字母及多项式的最低次幂的乘积；③知道提公因式法就是把多项式分解成两个因式乘积的形式，其中一个因式是各项的公因式，另一个因式是由多项式除以公因式得到的；④用提公因式法分解因式后，应保证含有多项式的因式中再无公因式。

(2) 因式分解不同于数的计算，是对整式进行变形，学生第一次接触时在理解上会有一定的困难，在对整式乘法的认识还不够深入的情况下，就遇到与之有互逆关系的新情境，学生有时会出现因式分解后又反转回去做乘法的错误，解决此问题的关键是让学生正确认识因式分解的概念，理解它与整式乘法的互逆变形关系。

而学生在运用提公因式法分解因式的过程中，经常遇到的困难是公因式选取不准确，表现在忽视了某些相同的字母或式子，导致提取公因式后的因式中仍然含有公因式，解决此问题的关键是找出多项式各项系数的最大公约数和各项都含有的字母及多项式的最低次幂的积作为公因式。

14. 【格木解析】

(1) 设计意图：在环节二中，通过分式方程 $\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}$ 让学生感受到在去分母解分式方程的过程中，已经对原分式方程进行了变形，这种变形可能会使方程的解发生变化，从而让学生了解分式方程产生增根的原因：当整式方程的解使得所乘最简公分母不等于0时，相当于方程两边同时乘以非0数，方程的解不发生变化；当整式方程的解使得所乘最简公分母等于0时，相当于方程两边同时乘0，方程的解发生变化，此时出现了分母为0的情况。

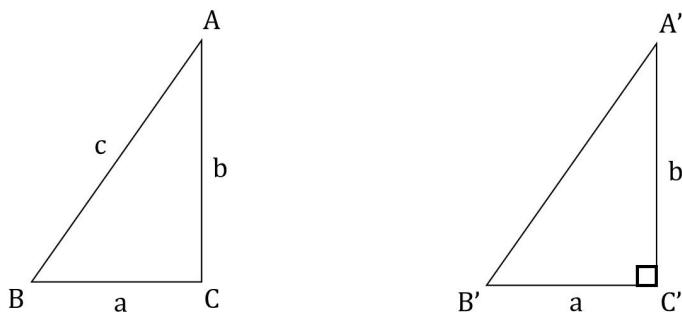
(2) 本节课的教学难点是：了解用去分母的方法解分式方程产生增根的原因。学生第一次接触分式方程，在对整式方程的认识还不够深入的情况下，就遇到比解整式方程复杂的求解过程和可能产生增根的新情境，学生对此内容的接受会有很大困难，特别是产生增根的原因，学生没有认知准备。学生在解整式方程时往往会有种思维定势，即所有遇到的方程都是有解的，因此对有些分式方程“无解”产生疑惑和不理解，尤其不明白产生增根时，为什么有些方程无解。教学时，教师要从等式的性质2出发，让学生认识到解分式方程时产生增根的原因。

15. 【格木解析】

(1) 设计意图：在问题1中，教学要求学生画几个三角形，测量边长，然后计算边长的平方，并分析最长边的平方与其他两边平方和之间的关系，最后引导得出结论，这种测量、计算、归纳和猜想的过程，是典型的几何探索过程。在问题2中，难以直接证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，联想到三角形全等这一工具，教师引导学生通过构造直角三角形，证明 $\triangle ABC$ 与一个已知直角三角形全等，从而证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形，让学生体会这种证明思路的合理性，帮助学生突破难点。

(2) 用构造法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形的基本思路是：先构造出一个 $Rt\triangle A'B'C'$ （如下图所示）：使得 $B'C' = a$, $A'C' = b$, $\angle C' = 90^\circ$ ，则 $\triangle A'B'C'$ 是一个以a, b为直角边长的直角三角形；再根据勾股定理得 $A'B'^2 = a^2 + b^2$ ，又因为 $a^2 + b^2 = c^2$ ，所以 $A'B'^2 = c^2$ ，即 $A'B' = c$ ，即 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 三边对应相等，由全等三角形的判定定理（SSS）可得， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$

两个三角形全等，因此 $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ，所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形。



16. 【格木解析】

(1) 体现的教学原则：体现了“学生主体性”原则。理由：王老师未采用传统的“教师罗列、学生记忆”的知识梳理模式，而是通过一道具体方程作为切入点，以提问的方式引导学生自主联想、发言，让学生成为梳理一元二次方程定义、解法、根的概念等知识的主体，而非被动接受者，充分尊重并发挥了学生在学习中的主动性和参与性。

(2) 设计的作用：王老师将一元二次方程的“根与系数的关系”等知识与“矩形的周长和面积计算”这一实际生活场景结合，其作用主要有两点，一是让抽象的数学知识（如根与系数的关系）变得具象化，学生能直观感受到“方程的根”可对应生活中“矩形的边长”，降低对抽象知识的理解难度；二是帮助学生建立“数学服务于生活”的认知，让学生意识到所学的一元二次方程知识能解决实际生活中的几何计算问题，激发学习兴趣，同时培养将数学知识应用于实际场景的能力。

第四章 教学设计

1. 【格木解析】

(1) 分数的基本性质、约分、分数与小数的互化。

(2) 教学目标:

1. 理解分数与除法的关系，会用分数表示两个数相除的商。
2. 经历分数与除法的关系的探究过程，通过讨论、比较，明确可以用分数表示两个数相除的商。
3. 体会生活中的数学，激发学生的学习兴趣。

教学重难点:

①重点：理解分数与除法的关系，会用分数表示两个数相除的商。

②难点：理解分数与除法的内在联系与区别

(3) 教学过程:

一、复习导入：(课件出示)

1. 填空:

(1) $\frac{6}{7}$ 表示_____。

(2) $\frac{7}{10}$ 的分数单位是_____, 它有_____个这样的分数单位。

2. 计算:

(1) $7 \div 8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $4 \div 9 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

组织学生交流，讨论计算方法。

3. 导入课题:

我们知道，在计算整数除法时经常会遇到除不尽或得不到整数商的情况，有了分数，就可以解决这个问题。这节课我们就来学习怎样用分数表示除法的商，认识分数与除法的关系。(板书课题：分数与除法)

二、探究新知

1. 教学例 1

(1) 课件出示情景图和问题。

读题后，指导学生根据整数除法的意义列出算式。

(2) 讨论：1 除以 3 的结果是多少？你是怎样想的？

学生说结果是 $\frac{1}{3}$ 个，教师追问：为什么是 $\frac{1}{3}$ 个？你是怎样分的？

指导学生用圆形纸片分一分。

(3) 教师画出示意图，帮助学生理解。

通过讨论使学生明白，把1个蛋糕平均分给3个人，其中每个人分得的应是这个蛋糕的 $\frac{1}{3}$ ，

就是 $\frac{1}{3}$ 个。

$$\text{板书: } 1 \div 3 = \frac{1}{3} \text{ (个)}$$

2. 教学例2

(1) 课件出示例2情景图

学生观察情景图，说一说情景图内容。

(2) 指导学生动手操作。

拿出3张同样大小的圆形纸片，把它们看作3个月饼，用剪刀把每张纸片分成同样大小的4份。

(3) 请几名学生口述分法及每份分得的结果，教师总结几种不同的分法。

(4) 归纳

教师总结：从上面的操作可以知道，把3个月饼平均分给4个人，每人分到的都是3个月饼的 $\frac{1}{4}$ ，把这3个 $\frac{1}{4}$ 个月饼合起来就是1个月饼的 $\frac{3}{4}$ ，即 $\frac{3}{4}$ 个月饼，因此， $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ (个)。

由此可见， $\frac{3}{4}$ 不仅可以理解为把1个月饼（单位“1”）平均分成4份，便是这样的3份的数，

也可以看做把3个月饼组成的整体（单位“1”）平均分成4份，表示这样的1份的数。

组织学生互相说说 $\frac{3}{4}$ 表示的意义。

3. 认识分数和除法的关系

(1) 引导学生观察 $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ ， $3 \div 4 = \frac{3}{4}$ 这两个算式，想一想：

①两个（非0）自然数相除，在不能得到整数商的情况下，还可以用什么表示？

②用分数表示商时，除法算式里的被除数、除数分别是分数里的什么？

③分数与除法的关系是怎样的？

(2) 学生发言，教师总结，归纳出以下三点：

①分数可以表示除法的商。

②在表示除法的商时，要用除数作为分母，被除数作为分子。

③除法中的被除数相当于分数中的分子，除数相当于分数中的分母。（强调“相当于”）分数与除法的关系可以表示成下面的形式：（板书）

$$\text{被除数} \div \text{除数} = \frac{\text{被除数}}{\text{除数}}$$

（3）如果用 a 表示被除数， b 表示除数，那么分数与除法的关系可以怎样表示？

指名学生回答，教师板书：（教材上那个关系式）

$$a \div b = \frac{a}{b} (b \neq 0)$$

⋮ ⋮

被 除
除
数 数

思考：这里的 b 能为 0 吗？为什么？

组织学生分小组讨论交流，指名汇报。

启发学生说出：在整数除法中，除数不能是 0，在分数中分母也不能是 0，所以这里 b 不能为 0。

（4）分数与除法有区别吗？区别在哪里？

引导学生明确：分数是一种数，也可以看作两个数相除的结果；除法是一种运算。

三、巩固练习

教材第 50 页“做一做”第 1 题

四、课后小结

引导学生回顾全课，说说这节课的收获。

2. 【格木解析】

(1) 学生之前已具备的相关数学知识和数学活动经验:

- ①对线段、直线、射线几何概念及其特点认识;
- ②对平行直线的初步认识; (也可酌情得分)
- ③观察、操作、比较、讨论等数学活动经验;
- ④分类活动的经验;
- ⑤抽象、归纳的经验。

(2) 本内容的重难点:

- ①正确理解互相平行的概念;
- ②理解平行的本质特征。

(3) 教学过程:

一、创设情境，引入新课

1. 演示设疑

师: 同学们注意看, 老师这里有两支铅笔, 看好, 掉下去了。这两支铅笔掉到地上, 可能会形成什么样的图形? (同时松手, 落到讲台后面, 不让学生看到落地后的情形)

2. 尝试探究

师: 请同学们独立思考, 然后用小棒代替铅笔摆一摆, 看看有几种摆法?

二、探索新知

1. 图形分类

(1) 尝试着把这四种图形进行分类。



请思考: 怎样分? 为什么这样分? (如出现交叉说法应强调是相交并板书相交, 它们相交后有一个点叫交点)

(2) 把小棒想成是直线, 再分类

师: 同学们不光说出怎样分, 还说出为什么? 非常好。同学们, 在我们日常生活中, 很多物体表示的是线段, 像我们刚才研究小棒、铅笔。如果把线段向两端无限延长就成了直线, 线段是直线的一部分, 假如把这幅图中的直线都无限延长, 你会发现什么? (生口答强调 2 号图形延长后会相交, 1 号图形不相交)

(3) 小结

看来研究两条直线的位置关系时不能光看表面, 更要看实质。同学们, 当我们对事物进行

分类的时候采用不同的分类标准，将会出现不同的分类结果，按照我们今天这节课研究的需要，如果按不相交和相交进行分类，应该这样分。（课件演示分成两种情形，一是不相交，另一是相交）

2. 认识平行

在同一平面内，两条直线的位置关系有相交和不相交两种可能，下面我们先来研究不相交。

（板书：不相交，并画两条互相平行的直线）

（1）师：我们数学书上是怎样描述这样的位置关系的呢？

师：书上怎么说？生口答（多叫几个同学说）

（2）介绍平行

在同一平面内，不相交的两条直线互相平行，其中一条直线是另一条直线的平行线。（边说边板书：同一平面内 互相平行 平行线）

（3）说一说（出示课件：红蓝两条互相平行的直线）

说一说，这两条直线的位置关系。

三、巩固练习

师：刚才从生活中知道了很多平行，在我们以前学过的平面图形中也有平行。

把两根小棒都摆成和第三根小棒平行，看看这两根小棒的位置关系怎样？（生动手摆后回答，师同时演示课件）

四、课堂小结

这节课你有什么收获？

五、布置作业

完成课后习题第一题。

3. 【格木解析】

教学过程：

一、复习铺垫，导入新课

出示解决问题：王鹏的爸爸给他买 6 个本，花了 9.4 元，每个本多少钱？汇报解答过程。

小结：因为是求价钱，所以根据实际情况用四舍五入法保留一位小数或者两位小数。

【设计意图：通过复习，巩固学生对求商的近似值一般方法的理解，为本节课学习的“去尾法”、“进一法”与“四舍五入法”区别做好准备。】

二、合作探究，解决问题

(1) 探究用“进一法”解决问题

课件出示例 10 第一小题：小强的妈妈要将 2.5 千克香油分装在一些玻璃瓶里，需要准备几个瓶子？学生汇报展示：

$$\textcircled{1} 2.5 \div 0.4 = 6.25 \text{ (个)} \quad \textcircled{2} 2.5 \div 0.4 = 6.256 \text{ (个)} \quad \textcircled{3} 2.5 \div 0.4 = 7 \text{ (个)}$$

提出：“你认同哪种方法？”总结：因为 6 个瓶子只能装 2.4 千克香油，还有 0.1 千克香油，需要多一个瓶子装，所以要准备 7 个瓶子才能装完。

引导学生理解：在解决实际问题时，有时不适宜用“四舍五入法”求商的近似值，像“分油到瓶子里”这种情况，出现了不满 5 也要向前一位进 1 的情况。

总结进一法：不管小数点后的尾数是多少，都是将小数点后的尾数舍去，向个位进一。

(2) 探究用“去尾法”解决问题

课件出示例 10 第二小题：王阿姨用一根 25 米长的红丝带包装礼盒。每个礼盒要用 1.5 米长的丝带，这些红丝带可以包装几个礼盒？

学生独立解答，小组交流。并汇报展开：

$$\text{预设: } \textcircled{1} 25 \div 1.5 = 16.666\ldots \text{ (个)} \quad \textcircled{2} 25 \div 1.5 = 16.666\ldots \approx 17 \text{ (个)} \quad \textcircled{3} 25 \div 1.5 = 16.666\ldots \approx 16 \text{ (个)}$$

提问：到底能包装多少个礼盒？

总结“去尾法”：像这样，出现了满 5 也要把尾数舍去的情况，我们把这种取近似值的方法叫做“去尾法”。

【设计意图：在学生新的知识体系初步形成时，老师有效地启发、引导、点拨、总结、提升，有助于加深学生对新知的理解。】

(3) 对比两道题：同样是取商的近似数有什么不同？提升：实际生活中取“近似值”时，不一定用“四舍五入法”，而要根据实际情况用“进一法”和“去尾法”取近似值。

【设计意图：将求商的近似值的各种情况作了梳理与比较，引导学生理解：在解决实际问题时，有时不适宜用“四舍五入法”的方法求商的近似值，而应采用“去尾”或“进一”。】

三、巩固练习，加深理解

一根木料长 10.5 米，先截取相等长度的 5 小段，共 8.5 米。剩下的要截成 0.8 小段，最多还能截出几段这样长的木料？

四、全课总结，拓展延伸

通过今天的学习，你对求商的近似数又有哪些新的认识？

【设计意图：通过总结拓展畅谈新认识收获，引导学生对本节课学习的知识和方法进行总结，对所学新知“进一法”和“去尾法”有更深刻的认识。】

五、布置作业

课后寻找身边应用“进一法”和“去尾法”的例子，并进行解决。

4. 【格木解析】

(1) 本节课教师先通过与学生息息相关的例子“文具盒”、“数学书”、“黑板”着手，直观、形象的让学生对“文具盒”、“数学书”、“黑板”面积单位有了进一步的认识。进一步通过“我们学校的占地面积是 2 ()，能填我们学过的面积单位吗？”来导入新课，这样能激起学生的学习兴趣，引起学生思考，从而达到“课未始，兴已浓”的状态。

(2) 教学目标：

①通过实际观察和推算，了解常用的土地面积单位公顷，体会 1 公顷的实际大小，知道 1 公顷=10000 平方米，会进行简单的单位换算。

②经历观察、想象、发现、交流等数学活动的过程，并在这一过程中加深对公顷的认识，发展学生的空间观念和数学思考。

③能借助计算器，应用平面图形的面积公式和有关面积单位换算的知识解决一些简单的实际问题，进一步感受数学与生活的联系，获得积极的情感体验。

(3) 首先，数学课程应致力于实现义务教育阶段的培养目标，要面向全体学生，适应学生个性发展的需要，使得：人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展。

其次，课程内容要反映社会的需要、数学的特点，要符合学生的认知规律。

再次，教学活动是师生积极参与、交往互动、共同发展的过程。有效的教学活动是学生学与教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。

最后，数学教学活动，特别是课堂教学应激发学生兴趣，调动学生积极性，引发学生的数学思考，教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础，面向全体学生，注重启发式和因材施教。

本节课教师先通过学生已经熟悉“文具盒”、“数学书”、“黑板”面积单位着手，进一步通过“我们学校的占地面积是 2 ()，能填我们学过的面积单位吗？”来激起学生思考，导入新课，体现了新课标的要求。

5. 【格木解析】

教学目标:

- 在熟悉的生活情境中初步认识负数，能正确地读、写正数和负数；知道0既不是正数也不是负数。
- 结合现实情境理解负数的具体含义，学会用正数、负数表示生活中相反意义的量。
- 了解负数产生的历史，感受正数、负数与生活的联系，结合史料进行爱国主义教育。

教学重难点：结合现实情境理解负数的不同含义。

教学过程

(一) 谈话激趣，导入新课

- 同学们，你们在生活中见过负数吗？你知道它的含义吗？
- 究竟什么是负数？它表示的含义有什么不同呢？今天我们这节课一起认识负数（揭示课题）。

【设计意图】开门见山直入主题，在谈话中了解学生的认知基础，激活学生的生活经验。

(二) 结合情境，理解意义

1. 初步感知负数

(1) 课件出示教材第2页例1：

下面是中央气象台2012年1月21日下午发布的六个城市的气温预报（2012年1月21日20时—2012年1月22日20时）。

教师：请仔细观察，说说你有什么发现？

预设：①哈尔滨的最高气温是零下19℃，最低气温是零下27℃；海口最热，最高气温是23℃……②-12℃表示零下十二摄氏度（读作负十二摄氏度）；零下温度在数字前加“-”……

(2) -3℃和3℃表示的意思一样吗？请在温度计中表示出来。

预设：①-3℃表示零下三度，3℃表示零上三度；②它们表示的意义相反；③先找0℃，往下数三格表示-3℃，往上数三格表示3℃。

(3) 0℃表示什么意思？

预设：①0℃表示天气很冷；②0℃表示淡水开始结冰的温度；③0℃是零上温度和零下温度的分界线。

小结：比0℃低的温度叫零下温度，通常在数字前加“-”（负号）。比0℃高的温度叫零上温度，在数字前加“+”（正号），一般情况下正号可省略不写。

(4) 请在温度计上表示-18℃，比一比-3℃和-18℃哪个温度低？

【设计意图】利用学生熟悉的气温引入负数，初步了解负数的读写方法，体会0的特殊性，并通过提问“-3℃和3℃表示的意思一样吗？”引导学生初步感知用正数、负数表示两种相反

意义的量。

2. 认识正负数

(1) 课件出示教材第3页例2。

教师：研究完气温，再来看看存折上的数。你们又有什么发现呢？说说这些数各表示什么？

预设：①2000.00 表示存入 2000 元；②500.00 和-500.00 的意义恰好相反，一个是存入 500 元，一个是支出 500 元。

(2) 教师：像零上温度与零下温度、收入与支出这样表示两种相反意义的量，生活中还有许多。你能举出这样的实例吗？

预设：水面上升 2 米、下降 2 米；乘车时上客 5 人、下客 6 人；货物运进 200 吨、运出 150 吨……

(3) 我们怎样来表示像这样两种相反意义的量呢？

教师：为了表示两种相反意义的量，需要用两种数。一种是我们以前学过的数，如 3、500、4.7、 $\frac{3}{8}$ ，这些数是正数；另一种是在这些数的前面添上负号“-”的数，如-3、-500、-4.7、 $-\frac{3}{8}$ 等，这些数是负数。那么 0 是什么数呢？(0 既不是正数，也不是负数，它是正数与负数的分界线。)

(4) 基本练习（课件出示教材第4页“做一做”第2题）

请学生独立思考，哪些是正数，哪些是负数，并填入相应的圈中。

-7 2.5 $+\frac{4}{5}$ 0 -5.2 $-\frac{1}{3}$ +41



【设计意图】在具体生活实例中让学生体会负数产生的必要性，认识正数、负数，初步建立正数、负数的概念。同时在出示的负数中有-7、-5.2、 $-\frac{1}{3}$ ，让学生感知负数中有负整数、负分数和负小数。

(三) 回归生活，拓展应用

教师：在日常生活中，人们还有好多时候要用到正数、负数，让我们一起接着看一看！

1. 课件出示教材第6页练习一第1题。

月球表面白天的平均温度是零上 126°C ，记作 ____ $^{\circ}\text{C}$ ，
夜间的平均温度为零下 150°C ，记作 ____ $^{\circ}\text{C}$ 。



- (1) 学生独立完成，集体反馈。
- (2) 看了这些信息，你有什么感受？月球表面白天的平均温度和夜间的平均温度相差多少度？

2. 课件出示教材第6页练习一第2题。



与北京时间相比，东京时间早1小时，记为+1时；巴黎时间晚7个小时，记为-7时，以北京时间为标准，表示出其他时区的时间。

悉尼时间：_____ 伦敦时间：_____

- (1) 仔细读题，说说你知道了什么信息？
- (2) 请表示出悉尼、伦敦的时间。北京时间用什么表示？
- (3) 以北京时间为标准，孟加拉国首都达卡的时间记为-2时，你知道它此时的时间吗？
- (4) 你还知道此时其他时区的时间吗？试着表示出来。

3. 课件出示练习题。

某食品厂生产的120克袋装方便面外包装印有“ (120 ± 5) 克”的字样。小明购买一袋这样的方便面，称一下发现117克，请问厂家有没有欺骗行为？为什么？

- (1) 说说你知道了什么信息？
- (2) “ 120 ± 5 ”表示什么意思？
- (3) 如果120克记作0克，117克可以记作多少克？

【设计意图】通过生活中的信息，让学生学习用正数、负数表示两种具有相反意义的量，丰富了对正数、负数意义的理解。

(四) 了解历史，课堂总结

1. 课件出示教材第4页“你知道吗？”内容。

其实，负数的产生和发展有着悠久的历史，我们一起来了解一下。

- (1) 看了介绍，你对负数又有什么新的认识？
- (2) 你有什么感受？

【设计意图】用图文结合的方式向学生介绍负数的发展史，让学生体会负数发展的历程和中国在负数发展上做出的贡献，激发学生的民族自豪感，进一步丰富学生对负数的认识。

2. 这节课你有什么收获？

教师：关于负数，生活中还有更多的知识等待我们去探索，只要同学们做善于观察的有心

人，在今后的生活和学习中会有更多的收获。

6. 【格木解析】

一、教学目标

1. 学生认识循环小数的特征，知道循环小数的意义；会区分有限小数和无限小数，能用简便方法写循环小数。
2. 通过观察、比较、探究，培养抽象、概括的能力和小组合作探究能力，体会无限的数学思想。
3. 学生能在学习过程中获得成功体验，培养积极的数学情感。

二、教学重难点

教学重点：掌握循环小数的意义，认识无限小数。

教学难点：能正确判断循环小数的循环节并能用简便记法表示。

三、教学过程

（一）创设情境，引入新课

教师结合 PPT 演示讲故事：从前有座山，山里有个庙庙里有个老和尚在给小和尚讲故事，讲什么呢？从前有座山，山里有个庙，庙里有个老和尚在给小和尚讲故事，讲什么呢？从前有座山，山里有个庙，庙里有个老和尚在给小和尚讲故事，讲什么呢？之后让几个学生继续讲这个重复的故事。

之后教师总结：像这样依次不断重复出现的现象，我们把它称为“循环”，在实际生活中，也有许多循环的现象如一年有春、夏、秋、冬四季，每年都是按照这样的规律依次不断重复出现。在我们的数学中也有这种有趣的循环现象，你们想了解吗？从而引出课题《循环小数》。

设计意图：用有趣的故事和生活中的循环现象导入新课，利于激发学生的学习兴趣，调动学生学习数学的积极性，同时让学生初步感知“循环”与“无限”。

（二）探究新知

1. 初步认识循环小数

教师利用课件出示例 8，引出学生列出算式 “ $400 \div 75 =$ ”

要求学生在练习本上独立完成，并继续提问：除了除不尽外你们还发现什么没有？猜想：如果继续除下去，商会是多少？它的第 4 位商是多少？第 5 位商呢？

学生发现如果继续除下去，无论除到哪一位，只要余数重复出现“25”，它的商也就会重复出现“3”。

教师总结：可以用省略号来表示永远也除不完的商然后进行板书 “ $400 \div 75 = 5.333\dots$ ”

教师继续总结：像 $5.333\dots$ 这样小数部分有一个数字依次不断重复出现的小数，就是循环小数，之后板书课题《循环小数》。

设计意图：小数除法学生都已掌握，让学生从计算中去发现问题，现通过交流讨论来寻找

规律，加深了对新知识理解，体现了学生的主体地位。

2. 进一步认识循环小数

教师出示教材第 33 页例 8. 引导学生独立完成例题“ $28 \div 18$, $78.6 \div 11$ ”，并思考问题：你觉得像这样的算式除到哪一位就可以不除了？这两道题的商你们能发现它们的异同吗？再次让学生感知像 $5.333\dots$ 、 $1.555\dots$ 、 $7.14545\dots$ 这样的小数都是循环小数。

学生经历动手计算，与同桌交流讨论得出结论：只要余数出现重复了，就可以不除了。因为余数重复出现，商也会跟着重复出现。二者之间的不同一个是小数“3”不断重复出现，另一个是小数“4”和“5”不断重复出现。

教师根据学生的回答板书，小结循环数的意义：

- (1) 小数部分，位数无限（或者除不尽）。
- (2) 有的是一个数字不断重复出现，有的是两个。
- (3) 有一定的顺利（依次）

并出示练一练：下面哪些数是循环小数？

0.426426... 1.444 6.32121... 3.1415926...

设计意图：由简单到复杂的几个事例，让学生逐渐认识循环小数的特点，通过尝试归纳循环小数的含义，将学生的初步感知上升为理性认识，设计“练一练”，让学生通过正反两方面的对比进一步认识循环小数。

3. 认识循环节，学习简便记法

教师组织学生自学教材第 34 页“做一做”上面的内容并提出问题：什么是循环节？怎样用简便记法表示循环小数？引出除了用省略号来表示循环小数外，还可以用简便记法来表示。如 $5.333\dots$ 还可以写作 $5.\dot{3}$, $7.14545\dots$ 还可以写作 $7.1\dot{4}\dot{5}$, 读作七点一四五，四五循环。之后请学生把前面判断题中的循环小数用简便记法写一写。

教师让学生同座互相检查，大家交流订正，在这个过程中，鼓励学生质疑（如 52.52525 可能出现问题 52.52 、 52.525 、 52.52 ，师生共同辨析）。

设计意图：自学也是一种重要的学习方式，通过自学学生不仅能认识循环节，学会循环小数的简便记法，而且学生自主学习的能力还能得到锻炼和提高。

4. 认识有限小数和无限小数

教师出示一组除法计算“ $153 \div 7.2$ 、 $15 \div 16$ 、 $23 \div 3.3$ 、 $2.29 \div 1.1$ 和 $15 \div 7$ ”组织学生独立计算并观察这五道除法算式题，让学生想一想，两个数相除，如果不能得到整数商所得的商会有哪些情况？

学生归纳出两种情况：一种是继续除下去能够除尽，像 $153 \div 7.2$ 和 $15 \div 16$ 一样；另一种

情况是继续除下去，永远也除不完，像 $23 \div 3.3$ 、 $2.29 \div 1.1$ 、 $15 \div 7$ 一样。

教师概括：我们把小数部分的位数有限的小数叫作有限小数，小数部分的位数无限的小数叫作无限小数。并思考循环小数是无限小数还是有限小数？

设计意图：让学生进一步认识小数位数的有限与无限通过教师的适时介绍帮助学生建立有限小数与无限小数的概念。让学生思考“循环小数是有限小数还是无限小数”，接着教师举例说明“无限小数并不都是循环小数”，结合图示让学生明确循环小数、有限小数、无限小数之间的关系，突破教学难点。

（三）应用知识，解决问题

1. 写一写

教师出示练习题，组织学生独立完成，然后进行统一答疑。

根据循环小数的一般写法，写出它的简便写法，或者根据它的简便写法，写出它的一般写法。

$$3.143535\dots = \quad 3.1435 = \quad 2.0505 = \quad 7.307 =$$

2. 判断题

(1) 0.7777 是循环小数。 ()

(2) $1.\dot{3} > 1.333$ ()

(3) $2.\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{7} = 2.07$ ()

(4) $13.243243\dots$ 可写作 $13.24.$ ()

设计意图：针对本课的基础知识设计练习，有利于及时将新知进行内化，促进学生养成良好的数学学习习惯。

（四）课堂小结，畅谈收获

教师引导学生分享：这节课你学会了什么？有什么收获？

设计意图：及时回顾整理本课的收获，可以让学生学习数学的成就感，养成良好的学习习惯。

（五）作业练习，快乐巩固

课堂作业：教材第 37 页练习八第 6、8 题、第 10 题。

课外作业：算一算，想一想： $10 \div 7$ 的商的小数部分第 100 位上的数字是几？

设计意图：分层设置作业，以满足不同学生的发展需求。

7. 【格木解析】

一、教学目标

- 理解有理数除法的意义，熟练掌握有理数除法法则，会进行有理数的除法运算，了解倒数概念，会求给定有理数的倒数。
- 通过将除法运算转化为乘法运算，培养转化的思想，培养观察能力和动手操作能力。
- 感受生活中的数学，热爱数学。

二、教学重难点

重点：除法法则和除法运算

难点：根据除法是乘法的逆运算，归纳出除法法则及商的符号的确定。

三、教学过程

环节一：导入新课

教师活动：教师展示多媒体：请同学们看大屏幕并进行填空。提出以下问题：从上面这个例子你可以发现，有理数除法与乘法之间的关系是什么？

学生活动：学生填空后观察得出有理数除法与乘法之间的关系为互为逆运算。

教师活动：我们在小学学到了乘除法是互为逆运算的关系，那么我们现在引进了负数，也就是说在有理数范围内，乘除法还是互为逆运算的关系吗？不妨我们这节课就探究一下。教师板书课题。

设计意图：教师通过多媒体展示问题，提问学生回答关于简单的乘法和除法的应用题，联系实际意义归纳有理数乘法与除法之间的关系，归纳出乘法和除法为互逆运算，从而达到知识的迁移，为后面学习有理数的除法和除法法则做铺垫。

环节二：新课讲授

1 有理数的除法法则 1

教师活动：教师提出问题：规定向东走为正，向西走为负，东西走向的甲乙两地相距 80 米，小明每次从甲地向乙地走 10 米。小明向哪个方向共走多少次到达乙地？列出算式。

给予大家 6 分钟时间，独自思考后可以抢答，针对回答结果，相机评价。

学生活动：有的学生回答出，向西走 8 次到达乙地； $80 \div (-10) = -8$ ；有的学生回答： $80 \times (-1/10) = -8$ 。

教师活动：针对学生的回答，教师给予评价后，顺势引导学生观察并总结：从左边到右边的变形是除法变成了乘法，除数变成了这个数的倒数。所以，有理数除法法则 1：除以一个不等于 0 的数等于乘以这个数的倒数。

2. 有理数的除法法则 2

教师活动：教师再次提出问题：如何运用除法法则 1 进行有理数的除法运算？

学生活动:第一步求出除数的倒数,第二步将除法变成乘法,用被除数乘以除数的倒数,第三步运用有理数的乘法法则进行乘法运算。

教师活动:教师通过多媒体展示教材练习题,教师分配任务:前后四人为一个小组,做多媒体上的练习题,五分钟之后找各小组代表来黑板写出结果。针对回答结果,订正并评价。

学生活动:学生展示他们的回答结果。

教师活动:请同学们观察各题目中的除数和被除数以及商的性质符号,类比乘法法则归纳出除法有什么规律吗?

学生活动:两数相除,异号得负,并把绝对值相除。两数相除,同号得正,并把绝对值相除。

教师活动:师生共同总结出有理数乘除法法则 2:

两数相除,同号得正,异号得负,并把绝对值相除,0除以任何一个不等于0的数,都得0。做有理数除法运算时,第一步确定商的性质符号,第二步被除数的绝对值除以除数的绝对值。

设计意图:通过实际例子和计算练习,以小组讨论的形式计算并且归纳出有理数除法的两个法则,同时让同学们更好地用数学知识解决生活中的问题,培养同学们对数学的兴趣。

3. 例题讲解

教师活动:教师展示多媒体,并找学生口述解题过程教师板书,最后评价并总结。

学生活动:积极回答思考结果。

环节三:巩固提升

教师通过多媒体展示不同类型不同层次的练习题目,引导学生独自思考并作答,或者找同学代表到黑板上进行板演,完成后教师针对结果给予评价并总结。

设计意图:通过设置不同层次的练习题,不仅能使学生的新知得到及时巩固,也使学生思维能力得到有效提高,能更好的将知识学以致用,找学生代表去黑板练习,这也充分体现学生的主体性地位。最后针对练习结果,进行统一订正,并对他们的表现作出及时的评价,亦体现课程评价在课堂中的合理应用。

环节四:课堂小结

教师引导学生可以从知识方面,能力方面或情感等方面畅谈本节课的收获,针对学生的回答,相机评价并总结。

设计意图:在小结环节采用先让学生自评,接着让学生互评,最后教师表扬全班学生,不仅是为了检验学生对本节课重点内容的清楚认识,更能进一步增强学生的自信心和荣誉感使他们更加热爱数学。

环节五:布置作业

1. 将课本课后练习 2 做到作业本 上:
2. 生活中还有那些实际问题利用到了有理数的除法，大家找一找，尝试解决它.

设计意图:对本节课知识的再巩固，再认识。

8. 【格木解析】

一、教学目标

1. 学生能了解解二元一次方程组的“消元”思想，体会习数学中的“化未知为已知”“化复杂为简单”的化归思想. 了解代入法的概念，掌握代入法的基本步骤，会用代入法求二元一次方程组的解
2. 培养学生动手操作、探索、观察、分析的能力；感受转化的数学思想以及提高学生独立获取知识并解决问题的能力.
3. 在学生了解二元一次方程组的“消元”思想和从初步理解化“未知”为“已知”、化“复杂”为“简单”的划归思想中，享受学习数学的乐趣、提高学好数学的信心.

二、教学重难点

教学重点：了解代入法的一般步骤，会用代入法解二元次方程

教学难点：对代入消元法解方程组过程的理解及当方看组未知数系数都不为 1 (或-1) 时，如何用一个未知数表示另一个未知数。

三、教学过程

(一) 情境导入

教师创设篮球比赛的情境：体育节要到了，篮球是初一（1）班的优势项目，为了取得好名次，他们想在全部 10 场比赛中得到 16 分. 已知每场比赛都要分出胜负，胜队得分，负队得一分. 那么初一（1）班应该胜负各多少场才能得到 16 分？从而引导学生通过列二元一次方程组的形式来解决问题，思考如何对所列的方程进行求解，揭示课题解《消元解二元一次方程组》.

设计意图：教学活动要建立在学生的认知发展水平和已有经验之上，本环节利用学生熟悉的篮球比赛的情境，列出方程，提高学生解方程的积极性.

(二) 新授探究

活动一：解方程

教师出示下列问题，引导学生思考二元一次方程组与一元一次方程有什么关系？引出二元到一元的转化过程，引出带入消元的思想方法：

(1) 你能解二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 200 \\ y = x + 10 \end{cases}$ 吗?

(2) 你能解一元一次方程 $x + (x + 10) = 200$ 吗?

学生可以发现, 二元一次方程组中第 2 个方程 $y = x + 10$ 将第 1 个方程 $x + y = 200$ 的 y 换为 $x + 10$, 这个方程就化为一元一次方程 $x + (x + 10) = 200$.

活动二: 归纳解法

教师出示填空: 解方程组 $\begin{cases} 2y - x = 7 \text{ ①} \\ x = 3y - 1 \text{ ②} \end{cases}$

解: 把②代入①, 得_____.

解得 $y =$ _____

把解得的 y 的值代入②, 得_____.

所以原方程组的解为_____.

设计意图: 学生体会消元思想. 总结出这种通过代入消去一个未知数, 使二元方程转化为一元方程, 从而方程组得以求解的方法叫作代入消元法, 简称代入法.

活动三: 灵活运用

出示导入中篮球问题, 根据学生列出的二元一次方程组提出问题:

- (1) 选择哪个方程代入另一个方程? 其目的是什么?
- (2) 只求出一个未知数的值, 方程组解完了吗?
- (3) 把已求出的未知数的值, 代入哪个方程来求另一个未知数的值比较简便?
- (4) 怎样知道你运算的结果是否正确呢?

学生小组讨论, 得出方程: $\begin{cases} x + y = 10 \text{ ①} \\ 2x + y = 16 \text{ ②} \end{cases}$

①可进行移项得: $y = 10 - x$ ③

由于方程②与方程①中的 y 都表示同样的意义, 故可以把方程②中的 y 用 $10 - x$ 来替代, 即得: $2x + (10 - x) = 16$, 二元转化为一元, 求解 $x = 6$; 代入 $y = 10 - x$, 求得 $y = 4$, 请学生代表板演.

设计意图: 实例分析, 凸显解决方法, 展现解二元一次方程组的格式注意整体代入.

总结归纳消元的过程:

教师活动:

- (1) 变: 用另一未知数的代数式来表达
- (2) 代: 代入另一方程, 消元.

(3) 解: 解一元一次方程, 代入方程求解另一未知数.

(4) 验: 口算或练习本上验算.

设计意图: 实例分析, 凸显解决方法, 展现解二元一次方程组的格式。注意整体代入.

(三) 巩固练习

(1) 已知: $2x + 3y = 6$, 用 y 表示 x 为_____.

(2) 用 $y = ax + b$, 当 $x = 5$ 时, $y = 6$; 当 $x = -1$ 时, $y = -2$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 用代入法解方程: $\begin{cases} 4x + 3y = 5 \text{①} \\ x - 2y = 4 \text{②} \end{cases}$

设计意图: 代入消元的关键是把其中的一个未知数用一个未知数来表示, 通过练习可以及时巩固代入消元法可以检测学生的学习情况.

(四) 课堂小结

教师设计问题, 引导学生回顾整理本课的收获与体会问题如下:

(1) 我们学习了二元一次方程组的解法, 你有什么体会?

(2) 解二元一次方程组的步骤是什么? 方程组的解的表示方法: 应用大括号把一对未知数的值连在一起, 表示同时成立。

(3) 解二元一次方程组的思路是什么?

设计意图: 及时整理回顾本课的知识, 有利于学生更好地内化吸收.

(五) 布置作业

求满足 $5x + 3y = x + 2y = 7$ 的 x , y 的值, 完成练习实际应用题 1、2、3 题.

设计意图, 作业不仅能够实现对学生学习状况的反馈同时也能帮助学生对课程知识进行回顾.

9. 【格木解析】

一、教学目标

1. 应用三角形全等的知识，解释角平分线的原理，会用尺规作一个已知角的平分线。
2. 培养动手操作、探索、观察、分析的能力，提高独立获取知识并解决问题的能力。
3. 感受生活中的数学，热爱数学。

二、教学重难点

重点：利用尺规作已知角的平分线

难点：角的平分线的作图方法的提炼。

三、教学过程

一. 提出问题，创设情境

问题 1：三角形中有哪些重要线段。

问题 2：你能作出这些线段吗？

三角形中有三条重要线段，它们分别是：三角形的高，三角形的中线，三角形的角的平分线。过三角形的顶点作这个顶点的对边的垂线，交对边于一点，顶点与垂足的连线就是这个三角形的高。取三角形一边的中点，此中点与这个边对应顶点的连线就是这条边的中线。用量角器量出三角形的角的大小，量角器零度线与这个角的一边重合，这个角一半所对应的线就是这个角的角平分线。三角形的角平分线是一条线段，而一个已知角的平分线是一条射线，这两个概念是有区别的。如果老师手里只有直尺和圆规，你能设计一个作角的平分线的操作方案吗？

二、导入新课

在 $\angle AOB$ 的两边 OA 和 OB 上分别取 $OM=ON$, $MC \perp OA$, $NC \perp OB$. MC 与 NC 交于 C 点。

求证： $\angle MOC = \angle NOC$.

通过证明 $Rt\triangle MOC \cong Rt\triangle NOC$, 即可证明 $\angle MOC = \angle NOC$, 所以射线 OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线。

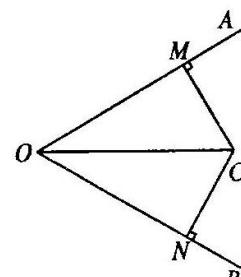
受这个题的启示，我们能不能这样做：在已知 $\angle AOB$ 的两边上分别截取 $OM=ON$, 再分别过 M 、 N 作 $MC \perp OA$, $NC \perp OB$, MC 与 NC 交于 C 点，连接 OC ，那么 OC 就是 $\angle AOB$ 的平分线了。

(学生思考、讨论后，统一思想，认为可行)

议一议：

下图是一个平分角的仪器，其中 $AB=AD$, $BC=DC$. 将点 A 放在角的顶点， AB 和 AD 沿着角的两边放下，沿 AC 画一条射线 AE , AE 就是角平分线。你能说明它的道理吗？

学生活动：讨论操作原理。要说明 AC 是 $\angle DAC$ 的平分线，其实就是要证明 $\angle CAD = \angle CAB$. $\angle CAD$ 和 $\angle CAB$ 分别在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle CAB$ 中，那么证明这两个三角形全等就可以了。看看条件够不够。



$$\begin{cases} AB = AD \\ BC = DC \\ AC = AC \end{cases}$$

所以 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS).

所以 $\angle CAD = \angle CAB$.

即射线 AC 就是 $\angle DAB$ 的平分线.

原来用三角形全等，就可以解决角相等、线段相等的一些问题。看来温故是可以知新的。

提出问题：

通过上述探究，能否总结出尺规作已知角的平分线的一般方法。自己动手做做看。然后与同伴交流操作心得。

(分小组完成这项活动，教师可参与到学生活动中，及时发现问题，给予启发和指导，使讲评更具有针对性)

讨论结果展示：

作已知角的平分线的方法：

已知： $\angle AOB$.

求作： $\angle AOB$ 的平分线.

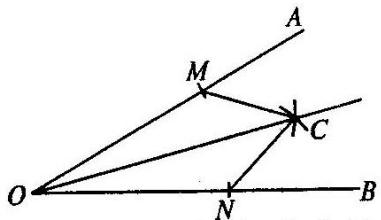
作法：

(1) 以 O 为圆心，适当长为半径作弧，分别交 OA、OB 于 M、N.

$\frac{1}{2}$

(2) 分别以 M、N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧。两弧在 $\angle AOB$ 内部交于点 C.

(3) 作射线 OC，射线 OC 即为所求。



议一议：

1. 在上面作法的第二步中，去掉“大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长”这个条件行吗？

2. 第二步中所作的两弧交点一定在 $\angle AOB$ 的内部吗？

(设计这两个问题的目的在于加深对角的平分线的作法的理解，培养数学严密性的良好学习习惯)

学生讨论结果总结：

1. 去掉“大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长”这个条件，所作的两弧可能没有交点，所以就找不到角的平分线.

2. 若分别以 M、N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画两弧，两弧的交点可能在 $\angle AOB$ 的内部，也可能在 $\angle AOB$ 的外部，而我们要找的是 $\angle AOB$ 内部的交点，否则两弧交点与顶点连线得到的射线就不是 $\angle AOB$ 的平分线了.

3. 角的平分线是一条射线. 它不是线段，也不是直线， 所以第二步中的两个限制缺一不可.

4. 这种作法的可行性可以通过全等三角形来证明.

练一练：任意画一角 $\angle AOB$ ，作它的平分线.

三. 随堂练习：

课本 P50 练习.

练后总结：

平角 $\angle AOB$ 的平分线 OC 与直线 AB 垂直. 将 OC 反向延长得到直线 CD，直线 CD 与 AB 也垂直.

四. 课时小结

本节课中我们利用已学过的三角形全等的知识， 探究得到了角平分线仪器的操作原理，由此归纳出角的平分线的尺规画法，进一步体会温故而知新是一种很好的学习方法.

五. 课后作业

课本 P51 习题 12. 2 第 1、2 题.

10. 【格木解析】

一、教学目标：

- 掌握三角形内角和定理。
- 理解并掌握直角三角形的两个锐角互余。

二、教学重难点：

重点：三角形内角和定理。

难点：三角形内角和定理的证明

三、教学过程

(一) 导入新课

我们在小学就知道三角形内角和等于 180° ，这个结论是通过实验得到的，这个命题是不是真命题还需要证明，怎样证明呢？

(二) 三角形内角和的证明

回顾我们小学做过的实验，你是怎样操作的？

把一个三角形的两个角剪下拼在第三个角的顶点处，用量角器量出 $\angle BCD$ 的度数，可得到 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 。

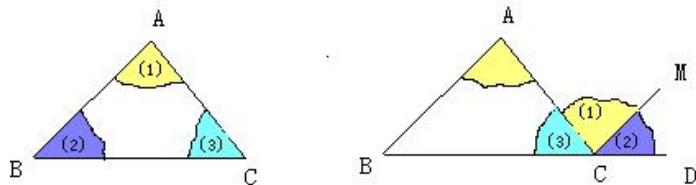


图 1

想一想，还可以怎样拼？

①剪下 $\angle A$ ，按图（2）拼在一起，可得到 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 。

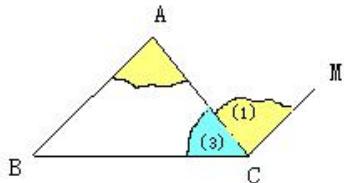


图 2

②把 $\angle B$ 和 $\angle C$ 剪下按图（3）拼在一起，可得到 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 。

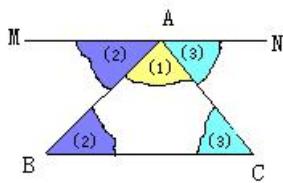


图 3

如果把上面移动的角在图上进行转移,由图 1 你能想到证明三角形内角和等于 180° 的方法吗?

已知 $\triangle ABC$, 求证: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ 。

证明:

过点 C 作 $CM \parallel AB$, 则 $\angle A = \angle ACM$, $\angle B = \angle DCM$,

又 $\angle ACB + \angle ACM + \angle DCM = 180^\circ$

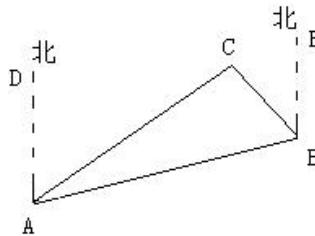
$\therefore \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 。

即: 三角形的内角和等于 180° 。

由图 2、图 3 你又能想到什么证明方法? 请说说证明过程。

(三) 例题巩固

如图, C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向, B 岛在 A 岛的北偏东 80° 方向, C 岛在 B 岛的北偏西 40° 方向, 从 C 岛看 A、B 两岛的视角 $\angle ACB$ 是多少度?



分析: 怎样能求出 $\angle ACB$ 的度数?

根据三角形内角和定理, 只需求出 $\angle CAB$ 和 $\angle CBA$ 的度数即可。

$\angle CAB$ 等于多少度? 怎样求 $\angle CBA$ 的度数?

解: $\angle CBA = \angle BAD - \angle CAD = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$

$\because AD \parallel BE \therefore \angle BAD + \angle ABE = 180^\circ$

$\therefore \angle ABE = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

$\therefore \angle ABC = \angle ABE - \angle EBC = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$

$\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$

答: 从 C 岛看 AB 两岛的视角 $\angle ACB = 180^\circ$ 是 90° 。

学生自学教材 P13-P14 的内容

(四) 课堂练习

教材 P13 练习

(五) 作业:

课标挖空版

一、课程性质

1. 数学是研究数量关系和空间形式的科学。
2. 数学源于对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，得到数学的研究对象及其关系。
3. 基于抽象结构，通过对研究对象的符号运算、形式推理、模型构建等，形成数学的结论和方法，帮助人们认识、理解和表达现实世界的本质、关系和规律。
4. 数学不仅是运算和推理的工具，还是表达和交流的语言。
5. 数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展中发挥着不可替代的作用。数学素养是现代社会每一个公民应当具备的基本素养。
6. 数学教育承载着落实立德树人根本任务、实施素质教育的功能。义务教育数学课程具有基础性、普及性和发展性。
7. 学生通过数学课程的学习，掌握适应现代生活及进一步学习必备的基础知识和基本技能、基本思想和基本活动经验。

二、课程理念

一、填空题：

1. 义务教育数学课程以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导，落实立德树人根本任务，致力于实现义务教育阶段的培养目标，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展，逐步形成适应终身发展需要的核心素养。
2. 课程目标以学生发展为本，以核心素养为导向，进一步强调使学生获得数学基础知识、基本技能、基本思想和基本活动经验的获得与发展，发展运用数学知识与方法发现、提出、分析和解决问题的能力，形成正确的情感、态度和价值观。
3. 课程内容组织重点是对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径。重视数学结果的形成过程，处理好过程与结果的关系；重视数学内容的直观表述，处理好直观与抽象的关系；重视学生直接经验的形成，处理好直接经验与间接经验的关系。
4. 课程内容呈现注重数学知识与方法的层次性和多样性，适当考虑跨学科主题学习；根据学生的年龄特征和认知规律，适当采取螺旋式的方式，适当体现选择性，逐渐拓展和加深课程内容，适应学生的发展需求。
5. 有效的教学活动是学生学和教师教的统一，学生是学习的主体，教师是学习的组织者、引导者与合作者。
6. 学生的学习应是一个主动的过程，认真听讲、独立思考、动手实践、自主探索、合作交流等是学习数学的重要方式。

7. 教学活动应注重启发式，激发学生学习兴趣，引发学生积极思考，鼓励学生质疑问难，引导学生在真实情境中发现问题和提出问题，利用观察、猜测、实验、计算、推理、验证、数据分析、直观想象等方法分析问题和解决问题；

8. 评价不仅要关注学生数学学习结果，还要关注学生数学学习过程，激励学生学习，改进教师教学。

二、简答题：

1. 数学课程标准的五大理念是什么？

【参考答案】：1. 确立核心素养导向的课程目标；2. 设计体现结构化特征的课程内容；3. 实施促进学生发展的教学活动；4. 探索激励学习和改进教学的评价；5. 促进信息技术与数学课程融合。

三、课程目标

一、填空题：

1. 在义务教育阶段，数学眼光主要表现为：抽象能力（包括数感、量感、符号意识）、几何直观、空间观念与创新意识。

2. 通过对现实世界中基本数量关系与空间形式的观察，学生能够直观理解所学的数学知识及其现实背景。

3. 在义务教育阶段，数学思维主要表现为：运算能力、推理意识或推理能力。

4. 在义务教育阶段，数学语言主要表现为：数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识。

5. 核心素养具有整体性、一致性和阶段性，在不同阶段具有不同表现。小学阶段侧重对经验的感悟，初中阶段侧重对概念的理解。

6. 数感主要是指对于数与数量、数量关系及运算结果的直观感悟。

7. 量感主要是指对事物的可测量属性及大小关系的直观感知。

8. 符号意识主要是指能够感悟符号的数学功能。知道符号表达的现实意义；能够初步运用符号表示数量、关系和一般规律。

9. 抽象能力主要是指通过对现实世界中数量关系与空间形式的抽象，得到数学的研究对象，形成数学概念、性质、法则和方法的能力。

10. 运算能力主要是指根据法则和运算律进行正确运算的能力。

11. 几何直观主要是指运用图表描述和分析问题的意识与习惯。

12. 空间观念主要是指对空间物体或图形的形状、大小及位置关系的认识。

13. 推理意识主要是指对逻辑推理过程及其意义的初步感悟。

14. 数据意识主要是指对数据的意义和随机性的感悟。

15. 模型意识主要是指对数学模型普适性的初步感悟。

16. 应用意识主要是指有意识地利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象与规律，解决现实世界中的问题。

17. 创新意识主要是指主动尝试从日常生活、自然现象或科学情境中发现和提出有意义的数学问题。

18. 九年的学习时间划分为四个学段。其中，“六三”学制 1~2年级为第一学段，3~4年级为第二学段，5~6年级为第三学段，7~9年级为第四学段。

19. 在第一学段（1~2年级）经历简单的数的抽象过程，认识万以内的数，能进行简单的整数四则运算，形成初步的数感、符号意识和运算能力。

20. 在第二学段（3~4年级）认识自然数，经历小数和分数的形成过程，初步认识小数和分数；能进行较复杂的整数四则运算和简单的小数、分数的加减运算，理解运算律；形成数感、运算能力和初步的推理意识。

21. 在第三学段（5~6年级）经历用字母表示数的过程，认识自然数的一些特征，理解小数和分数的意义；能进行小数和分数的四则运算，探索数运算的一致性；形成符号意识、运算能力、推理意识。

22. 尺规作图是指用无刻度直尺和圆规进行作图。

二、简答题：

1. 核心素养有哪三个方面（简称“三会”）的构成？

【参考答案】：数学课程要培养的学生核心素养，主要包括以下三个方面：（1）会用数学的眼光观察现实世界。（2）会用数学的思维思考现实世界。（3）会用数学的语言表达现实世界。

2. 核心素养在小学阶段的主要表现有哪些？

【参考答案】：小学阶段核心素养主要表现为：数感、量感、符号意识、运算能力、几何直观、空间观念、推理意识、数据意识、模型意识、应用意识、创新意识。

3. 核心素养在初中阶段的主要表现有哪些？

【参考答案】：小学阶段核心素养主要表现为：抽象能力、运算能力、几何直观、空间观念、推理能力、数据观念、模型观念、应用意识、创新意识。

4. 数学课程的总目标是什么？

【参考答案】：通过义务教育阶段的数学学习，学生逐步会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界。学生能：（1）获得适应未来生活和进一步发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验。

（2）体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，在探索真实情境

所蕴含的关系中，发现问题和提出问题，运用数学和其他学科的知识与方法分析问题和解决问题。（3）对数学具有好奇心和求知欲，了解数学的价值，欣赏数学美，提高学习数学的兴趣，建立学好数学的信心，养成良好的学习习惯，形成质疑问难、自我反思和勇于探索的科学精神。

四、课程内容

一、填空题：

1. 义务教育阶段数学课程内容由数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践四个学习领域组成。
2. 综合与实践以跨学科主题学习为主，适当采用主题式学习和项目式学习的方式，设计情境真实、较为复杂的问题，引导学生综合运用数学学科和跨学科的知识与方法解决问题。
3. 综合与实践重在解决实际问题，以跨学科主题学习为主，主要包括主题活动和项目学习等。
4. 综合与实践第一、第二、第三学段主要采用主题式学习，将知识内容融入主题活动之中；第四学段可采用项目式学习。
5. 每个领域的课程内容按内容要求、学业要求、教学提示三个方面呈现。
6. 内容要求主要描述学习的范围和要求；学业要求主要明确学段结束时学习内容与相关核心素养所要达到的程度；教学提示主要是针对学习内容和达成相关核心素养而提出的教学建议。
7. 数与代数是义务教育阶段学生数学学习的重要领域，在小学阶段包括数与运算和数量关系两个主题。
8. “数与运算”包括整数、小数和分数的认识及其四则运算。数是对数量的抽象，数的运算重点在于理解算理、掌握算法，数与运算之间有密切的关联。
9. 初步体会数是对数量的抽象，感悟数的概念本质上的一致性，形成数感和符号意识；感悟数的运算以及运算之间的关系，体会数的运算本质上的一致性，形成运算能力和推理意识。
10. 学生经历由数量到数的形成过程，理解和掌握数的概念；经历算理和算法的探索过程，理解算理，掌握算法。
11. “数量关系”主要是用符号（包括数）或含有符号的式子表达数量之间的关系或规律。
12. 学生经历在具体情境中运用数量关系解决问题的过程，感悟加法模型和乘法模型的意义，提高发现和提出问题、分析和解决问题的能力，形成模型意识和初步的应用意识。

13. 减法是加法的逆运算、乘法是加法的简便运算、除法是乘法的逆运算。
14. 现实问题中的加法模型是表示总量等于各分量之和，乘法模型可大体分为与个数有关（总价=单价×数量）和与物理量有关（路程=速度×时间）的两种形式，感悟模型中量纲的意义。
15. 在认识整数的基础上，认识小数和分数。通过数的认识和数的运算有机结合，感悟计数单位的意义，了解运算的一致性。
16. 通过整数的运算，感悟整数的性质；通过整数、小数、分数的运算，进一步感悟计数单位在运算中的作用，感悟运算的一致性。
17. 数的运算教学应注重对整数、小数和分数四则运算的统筹，让学生进一步感悟运算的一致性。
18. 理解整数、分数、小数的加减运算都要在相同计数单位下进行，感悟加减运算的一致性。
19. 理解用字母表示的一般性，形成初步的代数思维。
20. 图形与几何是义务教育阶段学生数学学习的重要领域，在小学阶段包括图形的认识与测量和图形的位置与运动两个主题。学段之间的内容相互关联，螺旋上升，逐段递进。
21. “图形的认识与测量”包括立体图形和平面图形的认识，线段长度的测量，以及图形的周长、面积和体积的计算。
22. 图形的认识主要是对图形的抽象。学生经历从实际物体抽象出几何图形的过程。
23. 图形的测量重点是确定图形的大小。学生经历统一度量单位的过程，感受统一度量单位的意义，基于度量单位理解图形长度、角度、周长、面积、体积。
24. 在推导一些常见图形周长、面积、体积计算方法的过程中，感悟数学度量方法，逐步形成量感和推理意识。
25. 图形的位置与运动包括确定点的位置，认识图形的平移、旋转、轴对称。
26. 图形的认识教学要帮助学生建立几何图形的直观概念。通过观察长方体的外表认识面，通过面的边缘认识线段，感悟图形抽象的过程。
27. 在认识线段的基础上，引导学生用直尺和圆规作给定线段的等长线段，感知线段长度与两点间距离的关系，增强几何直观。
28. 图形的面积教学要让学生在熟悉的情境中，直观感知面积的概念，经历选择面积单位进行测量的过程，理解面积的意义，形成量感。
29. 图形的认识与测量的教学要引导学生通过对立体图形的测量，从度量的角度认识立体图形的特征；理解长度、面积、体积都是相应度量单位的累加。

30. 引导学生运用转化的思想，推导平行四边形、三角形、梯形、圆等平面图形的面积公式，形成空间观念和推理意识。

31. 统计与概率是义务教育阶段数学学习的重要领域之一，在小学阶段包括数据分类、数据的收集、整理与表达和随机现象发生的可能性三个主题。

32. 数据分类的本质是根据信息对事物进行分类。学生经历从事物分类到数据分类的过程，感悟如何根据事物的不同属性确定标准，依据标准区分事物，形成不同的类。

33. 数据的收集、整理与表达包括数据的收集，用统计图表、平均数、百分数表达数据。

34. 随机现象发生的可能性是通过试验、游戏等活动，让学生了解简单的随机现象，感受并定性描述随机现象发生可能性的大小，感悟数据的随机性，形成数据意识。

35. 条形统计图的主要功能是表达数量的多少，借助条形统计图可以直观比较不同类别事物的数量。折线统计图教学要引导学生理解折线统计图的主要功能是表达数据的变化趋势。

36. 百分数教学要引导学生知道百分数是两个数量倍数关系的表达，既可以表达确定数据，也可以表达随机数据。

37. 第一学段综合与实践的主题活动，涉及“认识货币单位，认识时间单位时、分、秒，认识东、南、西、北四个方向”等知识的学习，关注幼小衔接，帮助学生积累数学活动经验。

38. 第二学段综合与实践的主题活动，涉及认识年、月、日，认识常用的质量单位，认识方向等数学知识的学习，在活动中综合运用数学和其他学科知识解决问题。

39. “曹冲称象”的基本原理是等量的等量相等。

40. 最初的度量方法都是借助日常用品，理解度量的本质就是表达量的多少，知道计量单位是人为规定的。

二、简答题：

1. 联系实际教学，在一、二年级数学教学中，你觉得应该如何进行数的认识教学？

【参考答案】：应提供学生熟悉的情境，使学生感受具体情境中的数量，可以用对应的方法，借助小方块、圆片和小棒等表示相等的数量，然后过渡到用数字表达，使学生体会可以用一个数字符号表示同样的数量；知道不同数位上的数字表示不同的值。教学中应注意，10 以内数的教学重点是使学生体验 1~9 从数量到数的抽象过程，通过 9 再加 1 就是十，体会十的表达与 1~9 的不同是在新的位置上写 1，这个位置叫十位，十位上的 1 表示 1 个十，1 个十用数字符号 10 表达。同理认识百以内数、万以内数。

五、学业质量

一、填空题：

1. 学业质量是学生在完成课程阶段性学习后的学业成就表现，反映核心素养要求。
2. 学业质量标准是以核心素养为主要维度，结合课程内容，对学生学业成就具体表现特征的整体刻画。
3. 数学课程学业质量标准是学业水平考试命题及评价的依据，同时对学生的学习活动、教师的教学活动、教材的编写等具有重要的指导作用。

二、简答题：

1. 数学课程学业质量标准主要从哪三个方面来评估学生核心素养达成及发展情况？

【参考答案】：（1）以结构化数学知识主题为载体，在形成与发展“四基”的过程中所形成的抽象能力、推理能力、运算能力、几何直观和空间观念等。（2）从学生熟悉的生活与社会情境，以及符合学生认知发展规律的数学与科技情境中，在经历“用数学的眼光发现和提出问题，用数学的思维与数学的语言分析和解决问题”的过程中所形成的模型观念、数据观念、应用意识和创新意识等。（3）学生经历数学的学习运用、实践探索活动的经验积累，逐步产生对数学的好奇心、求知欲，以及对数学学习的兴趣和自信心，初步养成独立思考、探究质疑、合作交流等学习习惯，初步形成自我反思的意识。

六、课程实施

一、填空题：

1. 教学目标的确定要充分考虑核心素养在数学教学中的达成。每一个特定的学习内容都具有培养相关核心素养的作用，要注重建立具体内容与核心素养主要表现的关联，在制订教学目标时将核心素养的主要表现体现在教学要求中。
2. 在确定小学阶段“数与运算”主题的教学目标时，关注学生符号意识、数感、量感、运算能力、推理意识等的形成。
3. 核心素养导向的教学目标是对四基、四能教学目标的继承和发展。
4. 四基、四能是发展学生核心素养的有效载体，核心素养对四基、四能教学目标提出了更高要求。
5. 引导学生在发现问题、提出问题的同时，会用数学的眼光观察现实世界；在分析问题的同时，会用数学的思维思考现实世界；在用数学方法解决问题的过程中，会用数学的语言表达现实世界。
6. 核心素养是在长期的教学过程中逐渐形成的，核心素养在不同学段的主要表现体现了核心素养的阶段性和各阶段之间的一致性。
8. 充分发挥核心素养导向的教学目标对教学过程的指导作用，在实现知识进阶的同时，体现核心素养的进阶。

9. 为实现核心素养导向的教学目标，不仅要整体把握教学内容之间的关联，还要把握教学内容主线与相应核心素养发展之间的关联。

10. 教学内容是落实教学目标、发展学生核心素养的载体。

11. 一方面了解数学知识的产生与来源、结构与关联、价值与意义，了解课程内容和教学内容的安排意图；另一方面强化对数学本质的理解，关注数学概念的现实背景，引导学生从数学概念、原理及法则之间的联系出发，建立起有意义的知识结构。

12. 通过合适的主题整合教学内容，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展核心素养。

13. 小学阶段“数与运算”主题，在理解整数、小数、分数意义的同时，理解整数、小数、分数基于计数单位表达的一致性。

14. 在教学过程中，不仅要注重具体内容与核心素养之间的关联，还要注重内容主线与核心素养发展之间的关联。

15. 在图形与几何领域的“图形的认识”主线，第一学段，要求在对立体图形和平面图形的认识过程中，通过直观辨认和感知形成初步的空间观念；第二学段，要求在对立体图形和平面图形关系的认识过程中，感悟图形的抽象，逐渐形成空间观念和初步的几何直观；第三学段，在对图形测量和计算的过程中，从度量的角度加深对图形的认识，理解图形的关系，进一步增强空间观念、量感和几何直观。

16. 改变单一讲授式教学方式，注重启发式、探究式、参与式、互动式等，探索大单元教学，积极开展跨学科的主题式学习和项目式学习等综合性教学活动。

17. 根据不同的学习任务和学习对象，选择合适教学方式或多种方式相结合，组织开展教学。通过丰富的教学方式，让学生在实践、探究、体验、反思、合作、交流等学习过程中感悟基本思想、积累基本活动经验，发挥每一种教学方式的育人价值，促进学生核心素养发展。

18. 改变过于注重以课时为单位的教学设计，推进单元整体教学设计，体现数学知识之间的内在逻辑关系，以及学习内容与核心素养表现的关联。

19. 注重发挥情境设计与问题提出对学生主动参与教学活动的促进作用，使学生在活动中逐步发展核心素养。

20. 注重创设真实情境。真实情境创设可从社会生活、科学和学生已有数学经验等方面入手，围绕教学任务，选择贴近学生生活经验、符合学生年龄特点和认知加工特点的素材。

21. 重视设计合理问题。在真实情境中提出能引发学生思考的数学问题，也可以引导学生提出合理问题。

22. 问题提出应引发学生认知冲突, 激发学生学习动机, 促进学生积极探究, 让学生经历数学观察、数学思考、数学表达、概括归纳、迁移运用等学习过程, 体会数学是认识、理解、表达真实世界的工具、方法和语言, 增强认识真实世界、解决真实问题的能力, 树立学好数学的自信心, 养成良好的学习习惯。

23. 注重情境素材的育人功能, 如体现中国数学家贡献的素材, 帮助学生了解和领悟中华民族独特的数学智慧, 增强文化自信和民族自豪感。

24. 注重情境的多样化, 让学生感受数学在现实世界的广泛应用, 体会数学的价值。

25. 综合与实践领域的教学活动, 以解决实际问题为重点, 以跨学科主题学习为主, 以真实问题为载体, 适当采取主题活动或项目学习的方式呈现, 通过综合运用数学和其他学科的知识与方法解决真实问题, 着力培养学生的创新意识、实践能力、社会担当等综合品质。

26. 主题活动教学是跨学科背景下的数学内容学习, 其目标是引导学生在跨学科背景下用数学的眼光观察现实世界, 用数学的语言表达现实世界中事物的概念、关系和规律, 帮助学生感悟数学与现实世界的联系, 培养学生实践精神。

27. 项目学习教学以用数学方法解决现实问题为主, 其目标是引导学生发现解决现实问题的关键要素, 用数学的思维分析要素之间的关系并发现规律, 培养模型观念, 经历发现、提出、分析、解决问题的过程, 培养应用意识和创新意识。

28. 主题活动教学要设计出完整可行的活动方案, 可以利用信息技术或制作教具的形式, 展示跨学科主题的背景; 参考学生个人经验和已有知识积累, 从解决问题需要出发, 明确所学数学知识与技能, 提出相应学习任务, 确定学习活动形式, 明确学习成果的形式和要求等。

29. 发挥评价的育人导向作用, 坚持以评促学、以评促教。主要分为教学评价和学业水平考试。

30. 教学评价方式应包括书面测验、口头测验、活动报告、课堂观察、课后访谈、课内外作业、成长记录等, 可以采用线上线下相结合的方式。

31. 评价维度多元是指在评价过程中, 在关注四基、四能达成的同时, 特别关注核心素养的相应表现。

32. 评价主体应包括教师、学生、家长等。

33. 评价结果的呈现应采用定性与定量相结合的方式。

34. 第一学段的评价应以定性的描述性评价方式为主, 第二、第三学段可以采用描述性评价和等级评价相结合的方式, 第四学段可以采用等级评价和分数制评价相结合的方式。

35. 学业水平考试由省级教育行政部门组织实施，依据学业质量标准，对学生学完本课程后课程目标达成度进行终结性评价。

36. 以核心素养为导向的考试命题，要关注数学的本质，关注通性通法，综合考查四基、四能与核心素养。

二、简答题：

1. 说一说新课程标准对我们的教学提出了哪些建议？

【参考答案】：1. 制订指向核心素养的教学目标：（1）教学目标要体现核心素养的主要表现；（2）处理好核心素养与“四基”“四能”的关系；（3）教学目标的设定要体现整体性和阶段性。2. 整体把握教学内容：（1）注重教学内容的结构化；（2）注重教学内容与核心素养的关联。3. 选择能引发学生思考的教学方式：（1）丰富教学方式，注重启发式、探究式、参与式、互动式；（2）重视单元整体教学设计；（3）强化情境设计与问题提出，注重创设真实情境，重视设计合理问题。4. 进一步加强综合与实践：（1）明确教学目标；（2）设计教学活动；（3）关注教学评价。5. 注重信息技术与数学教学的融合：（1）改进教学方式；（2）促进自主学习。

2. 学业水平考试的命题原则是什么？

【参考答案】：1. 坚持素养立意，凸显育人导向；2. 遵循课标要求，严格依标命题；3. 规范命题管理，加强质量监测。

3. 学业水平考试的性质和目的是什么？

【参考答案】：学业水平考试由省级教育行政部门组织实施，依据学业质量标准，对学生学完本课程后课程目标达成度进行终结性评价。考试成绩是学生毕业和高一级学校招生录取的重要依据，为评价区域和学校教学质量、改进教学提供重要参考。

4. 如何做好命题的规划？

【参考答案】：（1）考试形式以纸笔测试为主，可采用基于信息技术的考试方式，并与过程性评价、表现性评价等多样化的评价方式相结合。纸笔测试应合理规划题目类型，关注客观题与主观题分值所占比例，原则上客观题分值要低于主观题分值；主观题要探索命制问题解决及多学科融合类试题；试卷呈现避免套路化。（2）合理确定试卷容量。适当精减题量，要着重减少单纯考查技能熟练性的题目，保证学生有充足的作答时间。（3）科学制订多维细目表。在内容要求、素养表现的基础上，确定题型题量、难易程度、分值比例等。多维细目表的编制具体翔实，指向明确，便于命题操作，关注试卷难度、合格率、区分度等指标。

5. 如何进行试题的命制？

【参考答案】：加强命题的标准化建设，逐渐完成题库建设，实现命题流程的标准化，建立试题质量监测与评估体系。（1）明确考查意图。根据学业质量标准要求，明确试卷和每道试题所要考查的数学知识和核心素养的相应表现。（2）创设合理情境。根据考查意图，结合学生认知水平和生活经验，设计合理的生活情境、数学情境、科学情境，关注情境的真实性，适当引入数学文化。（3）设置合理问题。问题的设置要有利于考查对数学概念、性质、关系、规律的理解、表达和应用，注重考查学生的思维过程，避免死记硬背、机械刷题。（4）科学制定评分标准。评分标准应具有科学性、可操作性。对开放性、综合性较强的试题，合理设计多层次任务的评分标准。