目 录

第一部分 代数

考点一 数与代数

一、要点回顾

（一）数的认识

1.整数

（1）整数的读法

从高位到低位，一级一级地读．读亿级、万级时，先按照个级的读法去读，再在后面加一个“亿”或“万”字．每一级末尾的 0 都不读出来，其它数位连续有几个 0 都只读一个零．

（2）整数的写法

从高位到低位，一级一级地写，哪一个数位上一个单位也没有，就在那个数位上写 0．

（3）一个较大的多位数，为了读写方便，常常把它改写成用“万”或“亿”作单位的数．有时还可以根据需要，省略这个数某一位后面的数，写成近似数．

准确数：在实际生活中，为了计数的简便，可以把一个较大的数改写成以万或亿为单位的数．改写后的数是原数的准确数．例如把 1254300000 改写成以万做单位的数是 125430 万；改写成以亿做单位的数 12.543 亿．

近似数：根据实际需要，我们还可以把一个较大的数，省略某一位后面的尾数，用一个近似数来表示．例如：1302490015 省略亿后面的尾数是 13 亿．

四舍五入法：求近似数，看尾数最高位上的数是几，比 5 小就舍去，是 5 或大于 5 舍去尾数向前一位进 1．这种求近似数的方法就叫做四舍五入法．

2.小数

（1）小数的意义

把整数 1 平均分成 10 份、100 份、1000 份…得到的十分之几、百分之几、千分之几…可以用小数表示．如 1/10 记作 0.1,7/100 记作 0.07．一位小数表示十分之几，两位小数表示百分之几，三位小数表示千分之几…

一个小数由整数部分、小数部分和小数点部分组成．数中的圆点叫做小数点，小数点左边的数叫做整数部分，小数点左边的数叫做整数部分，小数点右边的数叫做小数部分．

小数点右边第一位叫十分位，计数单位是十分之一（0.1）；第二位叫百分位，计数单位是百分之一（0.01）…

小数部分最大的计数单位是十分之一，没有最小的计数单位．小数部分有几个数位，就叫做几位小数．如 0.36 是两位小数，3.066 是三位小数.在小数里，每相邻两个计数单位之间的进率都是 10．小数部分的最高分数单位“十分之一”和整数部分的最低单位“一”之间的进率也是 10．

（2）小数的读法

读小数的时候，整数部分按照整数的读法读，小数点读作“点”，小数部分从左向右顺次读出每一位

数位上的数字.

（3）小数的写法

写小数的时候，整数部分按照整数的写法来写，小数点写在个位右下角，小数部分顺次写出每一个数位上的数字.

（4）比较小数的大小

先看它们的整数部分，整数部分大的那个数就大；整数部分相同的，十分位上的数大的那个数就大；十分位上的数也相同的，百分位上的数大的那个数就大…

（5）小数的分类

①纯小数：整数部分是零的小数，叫做纯小数．例如：0.25,0.368 都是纯小数.

带小数：整数部分不是零的小数，叫做带小数．例如：3.25,5.26 都是带小数.

②有限小数：小数部分的数位是有限的小数，叫做有限小数．例如：41.7,25.3,0.23 都是有限小数.

无限小数：小数部分的数位是无限的小数，叫做无限小数．例如：4.33…,3.1415926…

无限不循环小数：一个数的小数部分，数字排列无规律且位数无限，这样的小数叫做无限不循环小数．例如：π

循环小数：一个数的小数部分，有一个数字或者几个数字依次不断重复出现，这个数叫做循环小数．例如：3.555…,0.0333…,12.109109…

一个循环小数的小数部分，依次不断重复出现的数字叫做这个循环小数的循环节．例如： 3.99…的循环节是“9”，0.5454…的循环节是“54”.

纯循环小数：循环节从小数部分第一位开始的，叫做纯循环小数．例如：3.111…,0.5656…

混循环小数：循环节不是从小数部分第一位开始的，叫做混循环小数．例如：3.1222…,0.03333…，写循环小数的时候，为了简便，小数的循环部分只需写出一个循环节，并在这个循环节的首、末位数字上各点一个圆点．如果循环节只有一个数字，就只在它的上面点一个点.

（6）小数的性质

在小数的末尾添上零或者去掉零小数的大小不变.

小数点向右移动一位，原来的数就扩大 10 倍；小数点向右移动两位，原来的数就扩大 100 倍；小数点向右移动三位，原来的数就扩大 1000 倍…

小数点向左移动一位，原来的数就缩小 10 倍；小数点向左移动两位，原来的数就缩小 100 倍；小数点向左移动三位，原来的数就缩小 1000 倍…

小数点向左移或者向右移位数不够时，要用“0"补足位.

3.分数

（1）分数的意义

把单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或者几份的数叫做分数．在分数里，中间的横线叫做分数线；分数线下面的数，叫做分母，表示把单位“1”平均分成多少份；分数线上面的数叫做分子，表示有这样的多少份．把单位“1”平均分成若干份，表示其中的一份的数，叫做分数单位.

（2）分数的读法：读分数时，先读分母再读“分之”然后读分子，分子和分母按照整数的读法来读.

（3）分数的写法：先写分数线，再写分母，最后写分子，按照整数的写法来写.

（4）比较分数的大小

①分母相同的分数，分子大的那个分数就大.

②分子相同的分数，分母小的那个分数就大.

③分母和分子都不同的分数，通常是先通分，转化成通分母的分数，再比较大小.

④如果被比较的分数是带分数，先要比较它们的整数部分，整数部分大的那个带分数就大；如果整数部分相同，再比较它们的分数部分，分数部分大的那个带分数就大.

（5）分数的分类

①真分数：分子比分母小的分数叫做真分数．真分数小于 1.

②假分数：分子比分母大或者分子和分母相等的分数，叫做假分数．假分数大于或等于 1.

③带分数：假分数可以写成整数与真分数合成的数，通常叫做带分数.

（6）分数和除法的关系及分数的基本性质

除法是一种运算，有运算符号；分数是一种数．因此，一般应叙述为被除数相当于分子，而不能说成被除数就是分子.

由于分数和除法有密切的关系，根据除法中“商不变”的性质可得出分数的基本性质.

分数的分子和分母都乘以或者除以相同的数（0 除外），分数的大小不变，这叫做分数的基本性质，它是约分和通分的依据.

（7）约分和通分

分子、分母是互质数的分数，叫做最简分数.

把一个分数化成同它相等但分子、分母都比较小的分数，叫做约分.

约分的方法：用分子和分母的公约数（1 除外）去除分子、分母；通常要除到得出最简分数为止.

把异分母分数分别化成和原来分数相等的同分母分数，叫做通分.

通分的方法：先求出原来几个分母的最小公倍数，然后把各分数化成用这个最小公倍数作分母的分数.

（8）倒数

乘积是 1 的两个数互为倒数.

求一个数（0 除外）的倒数，只要把这个数的分子、分母调换位置.

注意：1 的倒数是 1，0 没有倒数

4.百分数

（1）百分数的意义

表示一个数是另一个数的百分之几的数 叫做百分数,也叫做百分率或百分比．百分数通常用"%"来表示．百分号是表示百分数的符号.

（2）百分数的读法：读百分数时，先读百分之，再读百分号前面的数，读数时按照整数的读法来读.

（3）百分数的写法：百分数通常不写成分数形式，而在原来的分子后面加上百分号“%”来表示.

（4）百分数与折数、成数的互化

例如：三折就是 30%，七五折就是 75%，成数就是十分之几，如一成就是 10%，六成五就是 65%.

5.数的互化

（1）小数化成分数：原来有几位小数，就在 1 的后面写几个零作分母，把原来的小数去掉小数点作分子，能约分的要约分．

（2）分数化成小数：用分母去除分子．能除尽的就化成有限小数，有的不能除尽，不能化成有限小数的，一般保留三位小数．

(3)一个最简分数，如果分母中除了 2 和 5 以外，不含有其他的质因数，这个分数就能化成有限小数；如果分母中含有 2 和 5 以外的质因数，这个分数就不能化成有限小数．

(4)小数化成百分数：只要把小数点向右移动两位，同时在后面添上百分号．

(5)百分数化成小数：把百分数化成小数，只要把百分号去掉，同时把小数点向左移动两位．

(6)分数化成百分数：通常先把分数化成小数（除不尽时，通常保留三位小数)，再把小数化成百分数．

(7)百分数化成小数：先把百分数改写成分数，能约分的要约成最简分数．

6.数的整除

（1）整除的意义

整数 a 除以整数 b(b≠0)，除得的商是整数而没有余数，我们就说 a 能被 b 整除，或者说 b 能整除 a．

（2）约数和倍数

如果数 a 能被数 b（b≠0）整除，a 就叫做 b 的倍数，b 就叫做 a 的约数（或 a 的因数)．倍数和约数是相互依存的．

一个数的约数的个数是有限的，其中最小的约数是 1，最大的约数是它本身．一个数的倍数的个数是无限的，其中最小的倍数是它本身．

（3）奇数和偶数

自然数按能否被 2 整除的特征可分为奇数和偶数．

能被 2 整除的数叫做偶数．0 也是偶数．

不能被 2 整除的数叫做奇数．

奇数和偶数的运算性质：

相邻两个自然数之和是奇数，之积是偶数．

奇数+奇数=偶数，奇数+偶数=奇数，偶数+偶数=偶数；奇数-奇数=偶数，奇数-偶数=奇数，偶数-奇数=奇数，偶数-偶数=偶数；奇数×奇数=奇数，奇数×偶数=偶数，偶数×偶数=偶数．

（4）整除的特征

个位上是 0、2、4、6、8 的数，都能被 2 整除．

个位上是 0 或 5 的数，都能被 5 整除．

一个数的各位上的数的和能被 3 整除，这个数就能被 3 整除．

一个数各位数上的和能被 9 整除，这个数就能被 9 整除．

能被 3 整除的数不一定能被 9 整除，但是能被 9 整除的数一定能被 3 整除．

一个数的末两位数能被 4（或 25）整除，这个数就能被 4（或 25）整除一个数的末三位数能被 8（或 125）整除，这个数就能被 8（或 125）整除．

若一个整数的个位数字截去，再从余下的数中，减去个位数的 2 倍，如果差是 7 的倍数，则原数能被 7 整除．如果差太大或心算不易看出是否 7 的倍数，就需要继续上述（截尾、倍大、相减、验差）的过程，直到能清楚判断为止．例如，判断 133 是否 7 的倍数的过程如下：13－3×2＝7，所以 133 是 7 的倍数；又例如判断 6139 是否 7 的倍数的过程如下：613－9×2＝595，59－5×2＝49，所以 6139 是 7 的倍数，余类推．

若一个整数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除，则这个数能被 11 整除．11 的倍数检验法也可用上述检查 7 的（割尾法）处理，过程唯一不同的是：倍数不是 2 而是 1．

能被 2 整除的数叫做偶数；不能被 2 整除的数叫做奇数；0 也是偶数．自然数按能否被 2 整除的特征可分为奇数和偶数．

（5）质数与合数

一个数，如果只有 1 和它本身两个约数，这样的数叫做质数（或素数），100 以内的质数有：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97．

一个数，如果除了 1 和它本身还有别的约数，这样的数叫做合数．

1 不是质数也不是合数，自然数除了 1 外，不是质数就是合数．

如果把自然数按其约数的个数的不同分类，可分为质数、合数和 1．

（6）分解质因数

每个合数都可以写成几个质数相乘的形式．其中每个质数都是这个合数的因数，叫做这个合数的质因数．

把一个合数用质因数相乘的形式表示出来，叫做分解质因数．

（7）公约数

几个数公有的约数，叫做这几个数的公约数．其中最大的一个，叫做这几个数的最大公约数．

公约数只有 1 的两个数，叫做互质数，成互质关系的两个数，有下列几种情况：1 和任何自然数互质；相邻的两个自然数互质；两个不同的质数互质．当合数不是质数的倍数时，这个合数和这个质数互质．

两个合数的公约数只有 1 时，这两个合数互质，如果几个数中任意两个都互质，就说这几个数两两互质．

如果两个数是互质数，那么这两个数的最大公因数是 1．

（8）公倍数

几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数，其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数．

如果两个数是互质数，那么这两个数的积就是它们的最小公倍数．

几个数的公约数的个数是有限的，而几个数的公倍数的个数是无限的．

7.平方（根）、立方（根）

（二）数的运算

1.四则运算

（1）加法

把两个数合并成一个数的运算叫做加法．

在加法里，相加的数叫做加数，加得的数叫做和．加数是部分数，和是总数．

加数+加数=和

一个加数=和－另一个加数

（2）减法

已知两个加数的和与其中的一个加数，求另一个加数的运算叫做减法．

在减法里，已知的和叫做被减数，已知的加数叫做减数，未知的加数叫做差．被减数是总数，减数和差分别是部分数．加法和减法互为逆运算．

（3）乘法

求几个相同加数的和的简便运算叫做乘法．

在乘法里，相同的加数和相同加数的个数都叫做因数．相同加数的和叫做积．

在乘法里，0 和任何数相乘都得 0;1 和任何数相乘都的任何数．

一个因数×一个因数=积

一个因数=积÷另一个因数

（4）除法

已知两个因数的积与其中一个因数，求另一个因数的运算叫做除法．

在除法里，已知的积叫做被除数，已知的一个因数叫做除数，所求的因数叫做商．乘法和除法互为逆运算．

在除法里，0 不能做除数．因为 0 和任何数相乘都得 0，所以任何一个数除以 0，均得不到一个确定的商．

被除数÷除数=商

除数=被除数÷商

被除数=商×除数

（5）乘方

求几个相同因数的积的运算叫做乘方．例如 $3\times3=3^2$

2.运算法则

（1）运算定律

加法交换律：a+b=b+a．

加法结合律：（a+b)+c=a+(b+c)．

乘法交换律：a×b=b×a．

乘法结合律：(a×b)×c=a×(b×c)．

乘法分配律：(a+b)×c=a×c+b×c．

减法的性质：a-b-c=a-(b+c)．

（2）运算顺序

①小数四则运算的运算顺序和整数四则运算顺序相同．

②分数四则运算的运算顺序和整数四则运算顺序相同．

③没有括号的混合运算:同级运算从左往右依次运算；两级运算：先算乘、除法，后算加减法．

④有括号的混合运算:先算小括号里面的，再算中括号里面的，最后算括号外面的.

⑤第一级运算：加法和减法叫做第一级运算.

⑥第二级运算：乘法和除法叫做第二级运算.

3.运算规律

（1）积的变化规律

在乘法中，一个因数不变，另一个因数扩大（或缩小）若干倍，积也扩大（或缩小）相同的倍数.

推广：一个因数扩大 A 倍，另一个因数扩大 B 倍，积扩大 AB 倍．一个因数缩小 A 倍，另一个因数缩小 B 倍，积缩小 AB 倍.

（2）商不变性质

在除法中，被除数和除数同时扩大（或缩小）相同的倍数，商不变. $m\neq 0$ $a\div b=(a\times 8m)\div(b\times m)=(a\div m)\div(b\div m)$

推广：被除数扩大（或缩小）A 倍，除数不变，商也扩大（或缩小）A 倍.

被除数不变，除数扩大（或缩小）A 倍，商反而缩小（或扩大）A 倍.

4.比与比例

4.1.比的意义和性质

（1）比的意义：两个数相除又叫做两个数的比.

①“：”是比号，读作“比”．比号前面的数叫做比的前项，比号后面的数叫做比的后项（比的后项不能是零）．比的前项除以后项所得的商，叫做比值.

②同除法比较，比的前项相当于被除数，后项相当于除数，比值相当于商.

③比值通常用分数表示，也可以用小数表示，有时也可能是整数.

④根据分数与除法的关系，可知比的前项相当于分子，后项相当于分母，比值相当于分数值.

（2）比的性质：比的前项和后项同时乘上或者除以相同的数（0 除外），比值不变，这叫做比的基本性质.

（3）求比值和化简比

①求比值的方法：用比的前项除以后项，它的结果是一个数值可以是整数，也可以是小数或分数.

②根据比的基本性质可以把比化成最简单的整数比．它的结果必须是一个最简比，即前、后项是互质的数.

（4）比例尺

①数值比例尺：图上距离：实际距离=比例尺

②线段比例尺：在图上附有一条注有数目的线段，用来表示和地面上相对应的实际距离.

（5）按比例分配

①在农业生产和日常生活中，常常需要把一个数量按照一定的比来进行分配．这种分配的方法通常叫做按比例分配.

②方法：首先求出各部分占总量的几分之几，然后求出总数的几分之几是多少.

4.2.比例的意义和性质

（1）比例的意义

表示两个比相等的式子叫做比例.

组成比例的四个数，叫做比例的项.

两端的两项叫做外项，中间的两项叫做内项.

（2）比例的性质

在比例里，两个外项的积等于两个两个内向的积．这叫做比例的基本性质.

（3）解比例

根据比例的基本性质，如果已知比例中的任何三项，就可以求出这个数比例中的另外一个未知项.求比例中的未知项，叫做解比例.

4.3.正比例和反比例

（1）成正比例的量

两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量，他们的关系叫做正比例关系.

用字母表示 $\frac{y}{x}$ =k(一定）

（2）成反比例的量

两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的积一定，这两种量就叫做成反比例的量，他们的关系叫做反比例关系.

用字母表示 x×y=k(一定)

（三）常见的量

1.长度

（1）长度常用单位

千米（km），米（m），分米（dm），厘米（cm），毫米（mm），微米（μm）

（2）换算

1 毫米=1000 微米；1 厘米=10 毫米；1 分米=10 厘米；1 米=1000 毫米；1 千米=1000 米

2.面积

（1）面积常用单位

平方毫米（mm^2），平方厘米（cm^2），平方分米，平方米（m^2），平方千米，公顷

（2）换算

1 平方厘米=100 平方毫米；1 平方分米=100 平方厘米；1 平方米=100 平方分米；

1 公顷=10000 平方米；1 平方千米=100 公顷

3.体积和容积

（1）常用单位

体积：立方米，立方分米，立方厘米

容积：升，毫升

（2）换算

体积：1 立方米=1000 立方分米；1 立方分米=1000 立方厘米；

容积：1 升=1000 毫升；1 升=1 立方分米；1 毫升=1 立方厘米

4.质量

（1）常用单位

吨（t），千克（kg），克（g）

（2）换算

1 吨=1000 千克；1 千克=1000 克

5．时间

（1）常用单位

世纪，年，月，日，时，分，秒

（2）换算

1 世纪=100 年；1 年=365 天（平年）；1 年=366 天（闰年）；

一、三、五、七、八、十、十二月是大月，大月有 31 天；四、六、九、十一是小月，小月有 30 天；平年 2 月有 28 天，闰年 2 月有 29 天；

1，2，3 月为第一季度；4，5，6 月为第二季度；7，8，9 月为第三季度；10，11，12 月为第四季度；

1 星期=7 天；1 天=24 小时；1 小时=60 分；1 分=60 秒

（3）判断平年、闰年的方法

公历年份是 4 的倍数一般都是闰年；如果公历年份是整百数的，必须是 400 的倍数才是闰年．

6.货币

（1）常用单位

元，角，分

（2）换算

1 元=10 角；1 角=10 分

7.同一类计量单位之间的化聚

（1）名数：数+单位名称=名数

（2）单名数：只带有一个单位名称的叫做单名数

（3）复名数：带有两个或两个以上单位名称的叫做复名数

（4）化法：把高级单位的单名数或复名数改换成低级单位的单名数的方法，叫做化法．主要用相应的进率乘以高级单位的量数．

（5）聚法：把低级单位的单名数改换成高级单位的单名数或复名数的方法，叫和聚法．在聚的过程中，要用相应的进率去除以相关的量数．

（四）式与方程

1.代数式

用运算符号把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式．单独的一个数或一个字母也是代数式．

2.单项式

只含有数字与字母的积的代数式叫做单项式．

注意：单项式是由系数、字母、字母的指数构成的，其中系数不能用带分数表示，如$-4\dfrac{1}{3}a^2b$，这

种表示就是错误的，应写成$-\frac{13}{3}a^2b$．一个单项式中，所有字母的指数的和叫做这个单项式的次数．如$-5a^3b^2c$是6次单项式．

3.因式分解的常用方法

（1）提公因式法：$ab+ac=a(b+c)$

（2）运用公式法：$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

（3）分组分解法：$ac+ad+bc+bd=a(c+d)+b(c+d)=(a+b)(c+d)$

（4）十字相乘法：$a^2+(p+q)a+pq=(a+p)(a+q)$

4.分式

（1）分式的概念

一般地，用A、B表示两个整式，A÷B就可以表示成$\frac{A}{B}$的形式，如果B中含有字母，式子$\frac{A}{B}$就叫做分式．其中，A叫做分式的分子，B叫做分式的分母．分式和整式通称为有理式．

（2）分式的性质

分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变．

（3）分式的运算法则

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};$$

$$(\frac{a}{b})^n=\frac{a^n}{b^n}(n为整数);$$

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c};$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

5.方程

（1）一元一次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是1的整式方程叫做一元一次方程，其中方程$ax+b=0$（x为未知数，$a\neq 0$）叫做一元一次方程的标准形式，a是未知数x的系数，b是常数项．

（2）一元二次方程

①一元二次方程的一般形式

$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，它的特征是：等式左边是一个关于未知数x的二次多项式，等式右边是

零，其中 ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项.

②一元二次方程的解法

直接开平方法

配方法

公式法

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geq 0)$$

因式分解法

③一元二次方程根的判别式

通常用“Δ”来表示，即 $\Delta=b^2-4ac$

④一元二次方程根与系数的关系

如果方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个实数根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

（3）分式方程

分母里含有未知数的方程叫做分式方程.

（4）二元一次方程组的解法

①代入法②加减法

（5）三元一次方程组

由三个（或三个以上）一次方程组成，并且含有三个未知数的方程组，叫做三元一次方程组.

二、考题预测

（一）数的认识

1. 在 1，2，9 这三个数中，_______既是质数又是偶数，______既是合数又是奇数，_____既不是质数也不是合数.

2. 如果将某人收入 1000 元记作+1000 元，那么他支出 200 元就记作－200 元. _____.（判断对错）

3. 甲、乙两个合数互质，甲数大于乙数，它们的最小公倍数是 280，甲数是________，乙数是________.

4. 把 $\frac{2}{3}$、$0.\dot{6}\dot{7}$、67%，$0.6\dot{7}$ 按从大到小的顺序排列是：_________________________.

5. 甲、乙两数的最大公因数是 3，最小公倍数是 30，已知甲数是 6，乙数是_______

6. 六年级三个班分别有 42 人、36 人和 24 人参加植树劳动，要把他们分成人数相等的小组，但各班同学不能打乱，最多每组___________人？

7. 我国香港地区的总面积是十亿五千二百万平方米，改用“万”作单位的数是__________平方米，省略“亿”后面的尾数约是__________平方米.

8. a，b，c 是三个自然数，且 a＞b＞c＞0，那么下面各分数中最大的一个是（　　）

A．a/b　　B．c/b　　C．c/a　　D．b/a

9. 甲乙两堆煤，甲堆煤用去 1/4 吨，乙堆煤用去它的 1/4，剩下的两堆煤相等．那么（　　）

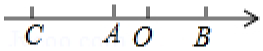
A．原来两堆煤相等　　　　B．原来甲堆煤多

C．原来乙堆煤多　　　　D．无法比较

10．$(-0.7)^2$ 的平方根是（　　）

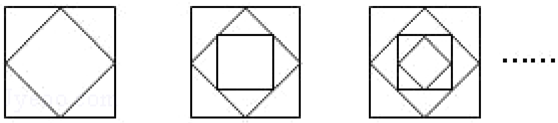
A．-0.7　　B．±0.7　　C．0.7　　D．0.49

11．如图，数轴上 A，B 两点表示的数分别为﹣1 和$\sqrt{3}$，点 B 关于点 A 的对称点为 C，则点 C 所表示的数为（　　）



A．﹣2﹣$\sqrt{3}$　　B．﹣1﹣$\sqrt{3}$　　C．﹣2+$\sqrt{3}$　　D．1+$\sqrt{3}$

12．观察下列图形，则第 n 个图形中三角形的个数是（　　）



第 1 个　　第 2 个　　第 3 个

A．2n+2　　B．4n+4　　C．4n﹣4　　D．4n

（二）数的运算

1．计算$(\frac{5}{6}+\frac{7}{8}-\frac{1}{12})\div\frac{1}{24}$

2．计算$\frac{4}{7}\times 23\frac{12}{13}+16\times\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\times\frac{4}{13}$

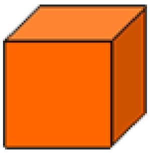
3．$(0.19\times 6\frac{3}{8}+0.19\times 3\frac{5}{8})\div 0.05$

4．$(598.1\times37\frac{2}{5}+5981\times6.26)\div1\frac{13}{17}+190\times\frac{17}{30}$

5．$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$

6．学校运来两捆树苗，共 240 棵．准备分给四、五、六年级栽种，六年级栽总棵数的$\frac{5}{12}$，四、五年级栽的棵数比是 3∶4．四年级应栽种_________棵．

7．如图是一个表面是红色的正方体，最少要切________刀，才能得到 100 个各面都没有红色的正方体．



8．一件工作，小李单独做 6 天完成，小王单独做 9 天完成．小李与小王工作效率的比是__________．

9．甲轮滚动 3 周的距离，乙轮要滚动 4 周，甲轮与乙轮的直径的比是（　　）

A．9:16　　B．3:4　　C．4:3　　D．16:9

10．六年级一班原有学生 42 人，其中男生占$\frac{4}{7}$．后来转来女生若干人，这时男生与女生人数的比是 6:5．现在全班有多少人？

（三）常见的量

1．3.06 吨=________千克，800 毫升=________升，45 分=________时

2．填入合适的单位名称

（1）一只大象约重 4.8_____

（2）小明的身高是 1.34______

（3）一袋面粉重 30______

（4）一个水池的容积是 1500_________

（5）边长 100 米的正方形土地的面积是 1_______

3．下列年份中是闰年的是（　　）

A．2010　　B．2014　　C．2015　　D．2012

（四）式与方程

1．某商人在一次买卖中均以 120 元卖出两件不同的衣服，一件赚 25%，一件赔 25%，则在这次交易中该商人的赚赔情况是（　　）

A．赚 16 元　　B．赔 16 元　　C．不赚不赔　　D．无法确定

2．甲、乙、丙、丁四人参加某次电脑技能比赛．甲、乙两人的平均成绩为a分，他们两人的平均成绩比丙的成绩低 9 分，比丁的成绩高 3 分，那么他们四人的平均成绩为（　　）分．

A．$a+6$　　B．$4a+1.5$　　C．$4a+6$　　D．$a+1.5$

3．多项式 $2a^2-4ab+2b^2$ 分解因式的结果正确的是（　　）

A．$2(a^2-2ab+b^2)$　　B．$2a(a-2b)+2b^2$　　C．$2(a-b)^2$　　D．$(2a-2b)^2$

4．小朱要到距家 1500 米的学校上学，一天，小朱出发 10 分钟后，小朱的爸爸立即去追小朱，且在距离学校 60 米的地方追上了他．已知爸爸比小朱的速度快 100 米/分，求小朱的速度．若设小朱速度是 x 米/分，则根据题意所列方程正确的是（　　）

A．$\dfrac{1440}{x-100}-\dfrac{1440}{x}=10$　　B．$\dfrac{1440}{x}=\dfrac{1440}{x+100}+10$

C．$\dfrac{1440}{x}=\dfrac{1440}{x-100}+10$　　D．$\dfrac{1440}{x+100}-\dfrac{1440}{x}=10$

5．若$\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$，则$\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}-3$的值是（　　）

A．-2　　B．2　　C．3　　D．-3

6．若$(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)-3=0$，则代数式$a^2+b^2$的值（　　）

A．-1　　B．3　　C．-1 或 3　　D．1 或-3

7．若关于 x 的一元二次方程$(m-1)x^2+5x+m^2-3m+2=0$的常数项为 0，则 m 的值为（　　）

A．1　　B．2　　C．1 或 2　　D．0

8．已知三角形的两边长分别是 3 和 6，第三边长是方程 $x^2-6x+8=0$ 的根，则这个三角形的周长等于（　　）

A．13　　B．11　　C．11 和 13　　D．12 和 15

9．计算：$\left|-2\right|-4\sin 30^0+(-1)^{2015}+(\pi-2)^0=$_______．

10．已知$x-\dfrac{1}{x}=6$，求$x^2+\dfrac{1}{x^2}$的值为________．

11．如果互为a,b相反数，x,y互为倒数，则$2014(a+b)-2015xy$的值是________．

12．已知方程组$\begin{cases}ax-by=4\\ax+by=2\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，则 2a－3b 的值为_______．

13．先化简，再求值：（$\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x^2-4x+4}$）÷$\frac{2}{x^2-2x}$，其中 x＝$\sqrt{3}$．

14．关于 x 的一元二次方程 $(m-1)x^2-2mx+m+1=0$．

（1）求证：方程有两个不相等的实数根；

（2）m 为何整数时，此方程的两个根都为正整数．

15．“重百”、“沃尔玛”两家超市出售同样的保温壶和水杯，保温壶和水杯在两家超市的售价分别一样．已知买 1 个保温壶和 1 个水杯要花费 60 元，买 2 个保温壶和 3 个水杯要花费 130 元．

（1）请问：一个保温壶与一个水杯售价各是多少元？（列方程组求解）

（2）为了迎接“五一劳动节”，两家超市都在搞促销活动，“重百”超市规定：这两种商品都打九折；“沃尔玛”超市规定：买一个保温壶赠送一个水杯．若某单位想要买 4 个保温壶和 15 个水杯，如果只能在一家超市购买，请问选择哪家超市购买更合算？请说明理由．

16．甲、乙两站路程为 360km,一列慢车从甲站开出，每小时行 48km，一列快车从乙站开出，每小时行 72km．

（1）两车同时开出，相向而行，多少小时相遇？

（2）若慢车先开出 20 分钟，快车再出发，两车同向而行，快车多少时间追上慢车？

17．山西特产专卖店销售核桃，其进价为每千克 40 元，按每千克 60 元出售，平均每天可售出 100 千克，后来经过市场调查发现，单价每降低 2 元，则平均每天的销售可增加 20 千克，若该专卖店销售这种核桃要想平均每天获利 2240 元，请回答：

（1）每千克核桃应降价多少元？

（2）在平均每天获利不变的情况下，为尽可能让利于顾客，赢得市场，该店应按原售价的几折出售？

18．一项工程，甲单独做要 12 天完成，乙 5 天可完成这项工程的$\frac{1}{3}$，现在由甲乙两人合作，几天完成全工程的$\frac{3}{4}$？

考点二 集合

一、要点回顾

1．集合的概念、关系

(1)集合中元素的特性：确定性、互异性、无序性，求解含参数的集合问题时要根据互异性进行检验．

(2)集合与集合之间的关系：$A\subseteq B$，$B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$，空集是任何集合的子集，含有 n 个元素的集合的子集数为 $\underline{2^n}$，真子集数为 $\underline{2^n-1}$，非空真子集数为 $\underline{2^n-2}$.

2．集合的基本运算

(1)交集：$A\cap B=\{x|x\in A$，且 $x\in B\}$．

(2)并集：$A\cup B=\{x|x\in A$，或 $x\in B\}$．

(3)补集：$\complement_U A=\{x|x\in U$，且 $x\notin A\}$．

重要结论：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

二、考题预测

1．已知集合 $A=\{x|y=x^2-2\}$，$B=\{y|y=x^2-2\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）.

A．R　　B．$\varnothing$　　C．A　　D．B

2．设全集 $U=R$，集合 $A=\{y|y=x^2-2\},B=\{x|y=\log_2(3-x)\}$，则 $(C_UA)\cap B=$（　　）.

A.$\{x|-2\le x<3\}$　　B.$\{x|x\le -2\}$　　C.$\{x|x<3\}$　　D.$\{x|x<-2\}$

3．已知集合 $M=\{x|x^2=2\}$，N=$\{x|ax=1\}$，若 $N\subseteq M$，则 a 的值是（　　）

A．$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．0或$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

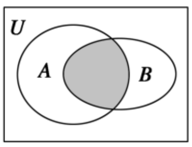
4．设集合 $A=\{x|a-2<x<a+2\}$，$B=\{x|x^2-4x-5<0\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围为（　　）

A．$[1,3]$　　B．$(1,3)$　　C．$[-3,-1]$　　D．$(-3,-1)$

5．已知集合 $A=\{(x，y)|y=a\}$，$B=\{(x，y)|y=b^x+1，b>0，b\neq 1\}$，若集合 $A\cap B$ 只有一个真子集，则实数 a 的取值范围是________.

6. 已知集合 $A=\{x|y=\lg(x-x^2)\}$，$B=\{x|x^2-cx<0，c>0\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 c 的取值范围是________.

7．设全集 U 为整数集，集合 $A=\{x\in\mathbf{N}|y=\sqrt{7x-x^2-6}\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|-1<x\le 3\}$，则图中阴影部分表示的集合的真子集的个数为________.



8．设 $A=\left\{y\left|y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}\right.\right\}, B=\left\{x\left|y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}\right.\right\}$,则 $A\bigcap B=$______.

9．已知集合 $A=\{(x，y)|x+y-1=0，x，y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x，y)|y=x^2+1，x，y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $A\cap B$ 的元素个数是______.

10．已知 $A=\{x\,|-2\le x\le 5\}, B=\{x\,|\,m-1\le x\le m+1\}, B\subseteq A$，则 m 的取值范围为______.

11．已知集合 $A=\{x|y=\lg(x-x^2)\}$，$B=\{x|x^2-cx<0, c>0\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 c 的取值范围是______.

考点三 函数与导数

一、要点回顾

（一）函数

1.函数的三要素

定义域、值域及对应关系

两个函数当且仅当它们的三要素完全相同时才表示同一函数.

2.函数的性质

(1)单调性：单调性是函数在其定义域上的局部性质．利用定义证明函数的单调性时，规范步骤为取值、作差、判断符号、下结论．复合函数的单调性遵循“同增异减”的原则.

(2)奇偶性：奇偶性是函数在定义域上的整体性质．偶函数的图象关于 y 轴对称，在关于坐标原点对称的定义域区间上具有相反的单调性；奇函数的图象关于坐标原点对称，在关于坐标原点对称的定义域区间上具有相同的单调性.

(3)周期性：周期性是函数在定义域上的整体性质．若函数在其定义域上满足 $f(a+x)=f(x)$(a 不等于 0)，则其一个周期 $T=|a|$.

3.函数的图象

对于函数的图象要会作图、识图、用图.

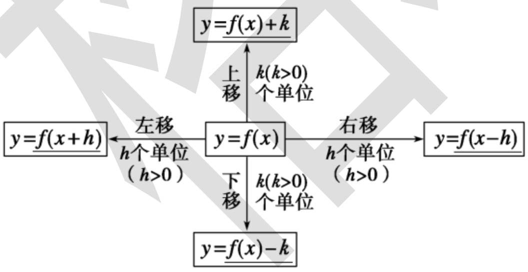
作函数图象有两种基本方法：一是描点法，二是图象变换法，其中图象变换有平移变换、伸缩变换、对称变换.

（1）描点作图

方法步骤：①确定函数的定义域；②化简函数的解析式；③讨论函数的性质即奇偶性、周期性、单调性、最值(甚至变化趋势)；④描点连线，画出函数的图像.

（2）图象变换

平移变换



对称变换

①$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}x\text{轴对称}}y=\underline{-f(x)}$；

②$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于}y\text{轴对称}}y=\underline{f(-x)}$；

③$y=f(x)\xrightarrow{\text{关于原点对称}}y=\underline{-f(-x)}$；

④$y=a^x\ (a>0$ 且 $a\neq 1)\xrightarrow{\text{关于}y=x\text{对称}} y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

翻折变换

①$y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{轴下方图像翻折上去}]{\text{保留}x\text{轴上方图像}} y=|f(x)|$.

②$y=f(x)\xrightarrow[\text{关于}y\text{轴对称的图像}]{\text{保留}y\text{轴右边图像，并作其}} y=f(|x|)$.

伸缩变换

①$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1\text{，横坐标伸长为原来的}\frac{1}{a}\text{倍，纵坐标不变}]{a>1\text{，横坐标缩短为原来的}\frac{1}{a}\text{倍，纵坐标不变}} y=f(ax)$.

②$y=f(x)\xrightarrow[0<a<1\text{，纵坐标缩短为原来的}a\text{倍，横坐标不变}]{a>1\text{，纵坐标伸长为原来的}a\text{倍，横坐标不变}} y=af(x)$.

4.一次函数、反比例函数和二次函数的图象与性质

（1）一次函数

所有一次函数的图像都是一条直线

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 有下列性质：

当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大

当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小

（2）反比例函数

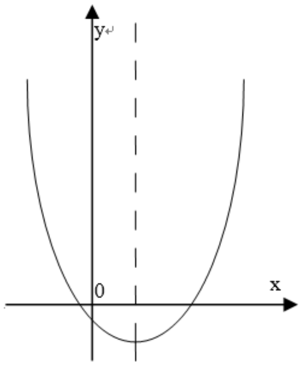
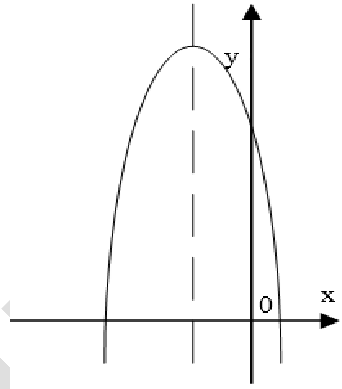
1）反比例函数的图像

反比例函数的图像是双曲线，它有两个分支，这两个分支分别位于第一、三象限，或第二、四象限，它们关于原点对称．由于反比例函数中自变量 $x\neq 0$，函数 $y\neq 0$，所以，它的图像与 x 轴、y 轴都没有交点，即双曲线的两个分支无限接近坐标轴，但永远达不到坐标轴．

2）反比例函数的性质

性质	①x 的取值范围是 $x\neq 0$， y 的取值范围是 $y\neq 0$； ②当 $k>0$ 时，函数图像的两个分支分别在第一、三象限．在每个象限内，y 随 x 的增大而减小．	①x 的取值范围是 $x\neq 0$， y 的取值范围是 $y\neq 0$； ②当 $k<0$ 时，函数图像的两个分支分别在第二、四象限．在每个象限内，y 随 x 的增大而增大．

（3）二次函数

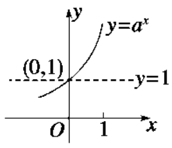
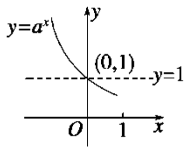
函数	二次函数 $y=ax^2+bx+c(a,b,c是常数，a\neq 0)$	
图像	a>0	a<0
		
性质	（1）抛物线开口向上，并向上无限延伸； （2）对称轴是 x=$-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$）； （3）在对称轴的左侧，即当 x<$-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小；在对称轴的右侧，即当 x>$-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大，简记左减右增； （4）抛物线有最低点，当 x=$-\dfrac{b}{2a}$时，y 有最小值，$y_{最小值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$	（1）抛物线开口向下，并向下无限延伸； （2）对称轴是 x=$-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是（$-\dfrac{b}{2a}$，$\dfrac{4ac-b^2}{4a}$）； （3）在对称轴的左侧，即当 x<$-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而增大；在对称轴的右侧，即当 x>$-\dfrac{b}{2a}$时，y 随 x 的增大而减小，简记左增右减； （4）抛物线有最高点，当 x=$-\dfrac{b}{2a}$时，y 有最大值，$y_{最大值}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

5.指数函数、对数函数和幂函数的图象和性质

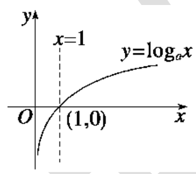
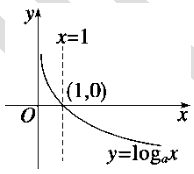
(1)指数函数 $y=a^x(a>0，a\neq 1)$与对数函数 $y=\log_a x(a>0，a\neq 1)$的图象和性质，分 $0<a<1$，$a>1$ 两种情况，着重关注两函数图象中的两种情况的公共性质．

指数函数的图像与性质

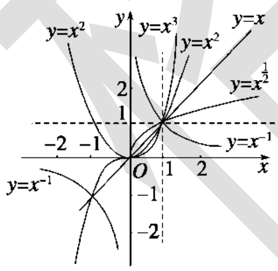
y＝ax	a>1	0<a<1

图像		
定义域	(1)**R**	
值域	(2)(0，+∞)	
性质	(3)过定点(0,1)	
	(4)当 $x>0$ 时，$y>1$；$x<0$ 时，$0<y<1$	(5)当 $x>0$ 时，$0<y<1$；$x<0$ 时，$y>1$
	(6)在(−∞，+∞)上是增函数	(7)在(−∞，+∞)上是减函数

对数函数的图像与性质

	a>1	0<a<1
图象		
性质	(1)定义域：(0，+∞)	
	(2)值域：**R**	
	(3)过定点(1,0)，即 $x=1$ 时，$y=0$	
	(4)当 $x>1$ 时，$y>0$ 当 $0<x<1$ 时，$y<0$	(5)当 $x>1$ 时，$y<0$ 当 $0<x<1$ 时，$y>0$
	(6)在(0，+∞)上是增函数	(7)在(0，+∞)上是减函数

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图象和性质，分幂指数 $\alpha>0$，$\alpha<0$ 两种情况.



	y=x	y=x2	y=x3	$y=x^{\frac{1}{2}}$	y=x−1
定义域	R	R	R	[0，+∞)	{x|x∈R 且 x≠0}
值域	R	[0，+∞)	R	[0，+∞)	{y|y∈R 且 y≠0}

奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	增	x∈[0，+∞)时，增；x∈(-∞，0]时，减	增	增	x∈(0，+∞) 时，减；x∈(-∞，0) 时，减

6.函数的零点与方程的根

(1)函数的零点

对于函数 $f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $f(x)$的零点.

(2)函数的零点与方程根的关系

函数 $F(x)=f(x)-g(x)$的零点就是方程 $f(x)=g(x)$的根，即函数 $y=f(x)$的图象与函数 $y=g(x)$的图象交点的横坐标.

(3)零点存在性定理

如果函数 $y=f(x)$在区间$[a，b]$上的图象是连续不断的一条曲线，且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$在区间$(a，b)$内有零点，即存在 $c\in(a，b)$使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

注意以下两点：

①满足条件的零点可能不唯一；

②不满足条件时，也可能有零点.

（二）导数

1.导数的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应地函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$在 x_0 处的导数（也称微商）.

记作 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 等.

并称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导. 如果上面的极限不存在，则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不可导.

导数定义的另一等价形式，令 $x=x_0+\Delta x$，$\Delta x=x-x_0$，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

我们也引进**单侧导数**概念.

右导数： $f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

左导数：$f'_{-}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

则有 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数皆存在且相等.

在讨论分段函数在分界点 x_0 处的可导性时，要用上述结论.

2．导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数值就是曲线 $y=f(x)$在点(x_0，$f(x_0)$)处的切线的斜率，其切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

3.导函数

（1）函数在区间上的可导性

若函数 f(x)在区间（a,b）内每一点都可导,则称 f(x)在（a,b）内可导．若 f(x)在开区间（a,b）内可导，且 f(x)既在点 x=a 处可导，又在点 x=b 处可导（即 $f'_{+}(a)$ 与 $f'_{-}(b)$ 都存在），则称 f(x)在闭区间[a,b]上可导.

（2）导函数

若 f(x)在区间 I 可导，则 $\forall x\in I$ 都对应着 f(x)的一个确定的导数值 $f'(x)$，这就构成一个新的函数，叫做 y=f(x)的导函数，简称导数，双叫一阶导数．记为 y' 或 $f'(x),\dfrac{dy}{dx},\dfrac{df(x)}{dx}$.

4.导数与函数单调性的关系

(1)$f'(x)>0$ 是 $f(x)$为增函数的充分不必要条件，如函数 $f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，但 $f'(x)\geqslant 0$.

(2)$f'(x)\geqslant 0$ 是 $f(x)$为增函数的必要不充分条件，当函数在某个区间内恒有 $f'(x)=0$ 时，则 $f(x)$为常函数，函数不具有单调性.

5.函数的极值与最值

(1)函数的极值是局部范围内讨论的问题，函数的最值是对整个定义域而言的，是在整个范围内讨论的问题.

(2)函数在其定义区间的最大值、最小值最多有一个，而函数的极值可能不止一个，也可能没有.

(3)闭区间上连续的函数一定有最值，开区间内的函数不一定有最值，若有唯一的极值，则此极值一定是函数的最值.

6.微分的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有增量 Δx 时，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$有下面的表达式

$$\Delta y=A(x_0)\Delta x+0(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$$

其中 $A(x_0)$为与 Δx 无关，$0(\Delta x)$是 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小.

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，并把 Δy 中的主要线性部分 $A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分，记以

$dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x)\big|_{x=x_0}$

我们定义自变量的微分 dx 就是 Δx .

7.可导与可微的关系

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导.

且 $dy\big|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$

一般地， $y=f(x)$ 则 $dy=f'(x)dx$

所以导数 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ 也称为微商，就是微分之商的含义.

8.可导与连续

f(x)在点 x_0 处可导，则 f(x)在点 x_0 处连续；反之，f(x)在点 x_0 处连续，f(x)在点 x_0 处不一定可导，如 f(x)=｜x｜在 x=0 处连续但不可导.

9.可导与微分表

$(c)'=0$ $d(c)=0$

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 实常数）$\mathrm{d}(x^{\alpha})=\alpha x^{\alpha-1}dx$（$\alpha$ 实常数）

$(\sin x)'=\cos x$； $d\sin x=\cos xdx$

$(\cos x)'=-\sin x$； $d\cos x=-\sin xdx$

$(\tan x)'=\sec^2 x$； $d\tan x=\sec^2 xdx$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$； $d\cot x=-\csc^2 xdx$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$； $d\sec x=\sec x\tan xdx$

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$； $d\csc x=-\csc x\cot xdx$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$； $d\log_a x=\dfrac{dx}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$； $d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$

$(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,a\neq 1)$； $da^x=a^x\ln adx\,(a>0,a\neq 1)$

$(e^x)'=e^x$； $de^x=e^xdx$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad d\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad d\arctan x = \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}; \quad darc\cot x = -\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}; \quad d\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}; \quad d\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

10.求导的基本方法

用微分表示 $dy = f'(u)du$ 其中 u 可以是自变量，也可以是另一变量的可微函数，这就是一阶微分形式不变性.

（1）反函数求导法则

设 y=f(x)在区间 I_x 内可导且 $f'(x) \neq 0$，y=f(x)的值域为区间 I_y，则 y=f(x)的反函数 $x = \varphi(y)$ 在 I_y 可导，且 $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

（2）隐函数求导法

设 $y = y(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定，求 y' 的方法如下：

把 $F(x, y) = 0$ 两边的各项对 x 求导，把 y 看作中间变量，用复合函数求导公式计算，然后再解出 y' 的表达式（允许出现 y 变量）

例如，$x^2 + y^2 = 1$，$2x + 2y \cdot y' = 0$，$y' = -\dfrac{x}{y}\ (y \neq 0)$

(3)对数函数求导法

先对所给函数式的两边取对数，然后再用隐函数求导方法得出导数 y'.

对数求导法主要用于：

①幂指函数求导数

②多个函数连乘除或开方求导数

关于幂指函数 $y = [f(x)]^{g(x)}$ 常用的一种方法 $y = e^{g(x)\ln f(x)}$ 这样就可以直接用复合函数运算法则

进行.

关于分段函数求分段点处的导数，常常要先讨论它的左、右两侧的导数.

(4)由参数方程确定函数的求导方法

设$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$\varphi(t),\psi(t)$ 可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

(5)分段函数求导法

设 f(x)为一个分段函数，其求导步骤为：

①对各段的表达式可按求导公式及法则求出导数.

②判断各分段点处的连续性，在其连续的分段点处，求出$f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$，并检查是否存在和相等.

③写出各段$f'(x)$，再加上相应的可导分段点的导数值.

11.高阶导数

（1）二阶导数

函数$y=f(x)$的导数$y'=f'(x)$仍是 x 的函数，把导函数$y'=f'(x)$的导数叫做$y=f(x)$的二阶导数，记作y''或$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$，即$y''=(y')'$或$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

（2）n 阶导数

把$y=f(x)$的 n-1 阶导函数$f^{(n-1)}(x)$的导数称为$y=f(x)$的 n 阶导数，记作$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

（3）高阶导数的计算

莱布尼兹（Leibniz）公式：

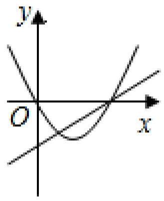
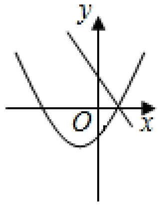
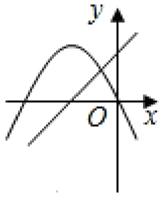
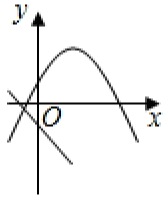
$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

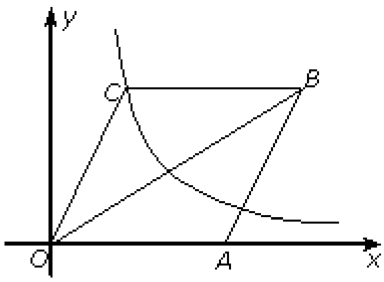
二、考题预测

（一）函数

1．已知一次函数 y=ax+b 与二次函数 y=ax^2+bx,它们在同一坐标系内大致图象是（　　）

A.  B.  C.  D. 

2．如图，菱形 OABC 在直角坐标系中，点 A 的坐标为（5，0），对角线 OB＝$4\sqrt{5}$，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（k≠0，x＞0）经过点 C．则 k 的值等于（　　）

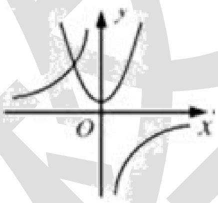
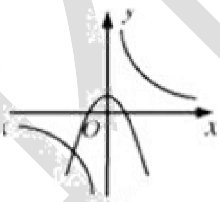
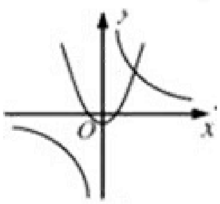
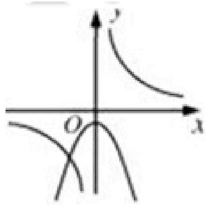


A．12　　B．8　　C．15　　D．9

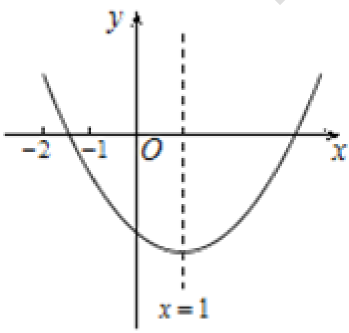
3．已知反比例函数 $y=\frac{2-5m}{x}$ 的图象上有 A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）两点，当 $x_1<x_2<0$ 时，$y_1<y_2$，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m<0$　　B．$m>0$　　C．$m<\frac{2}{5}$　　D．$m>\frac{2}{5}$

4．函数 y=$\frac{k}{x}$ 与 y=－k x^2 +k（k≠0）在同一直角坐标系中的图象可能是（　　）.

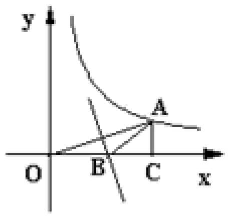
A.  B.  C.  D. 

5．已知二次函数 y=a x^2 +bx+c（a≠0）的图象如图所示，有下列结论：①b^2 －4ac＞0；②abc＞0；③b=-2a　④9a+3b+c＜0．其中，正确结论的个数是（　　）



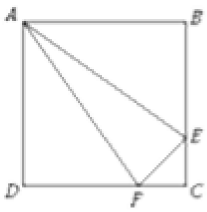
A．1　　　　B．2　　　　C．3　　　　D．4

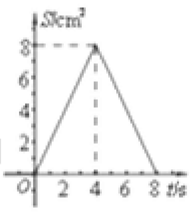
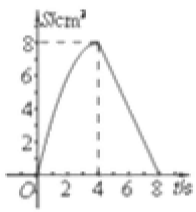
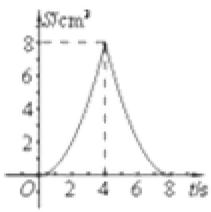
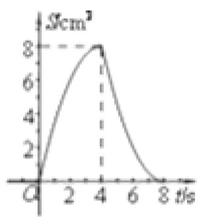
6．如图，点 A 在双曲线 $y=\dfrac{6}{x}$ 上，且 OA＝4，过 A 作 AC⊥ x 轴，垂足为 C，OA 的垂直平分线交 OC 于 B，则△ABC 的周长为（　　）



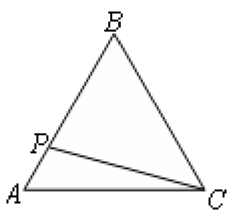
A．$4\sqrt{7}$　　　　B．5　　　　C．$2\sqrt{7}$　　　　D．$\sqrt{22}$

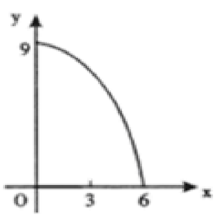
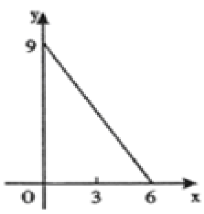
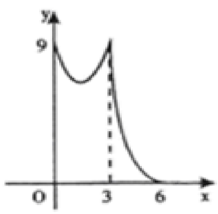
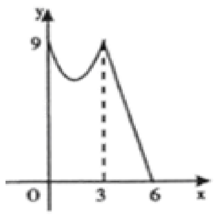
7．如图，正方形 ABCD 中，AB=4cm，点 E、F 同时从 C 点出发，以 1cm/s 的速度分别沿 CB﹣BA、CD﹣DA 运动，到点 A 时停止运动．设运动时间为 t（s），△AEF 的面积为 S（cm^2），则 S（cm^2）与 t（s）的函数关系可用图象表示为（　　）



A．　B．　C．　D．

8．如图，正三角形 ABC 的边长为 3cm，动点 P 从点 A 出发，以每秒 1cm 的速度，沿 A→B→C 的方向运动，到达点 C 时停止．设运动时间为 x（秒），y＝PC^2，则 y 关于 x 的函数的图象大致为（　　）



A．　B．　C．　D．

9．设f（x）＝2^x+x-4，则函数f（x）的零点位于区间（　　）

A．（2，3） B．（1，2） C．（0，1） D．（-1，0）

10．若 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，又有 $f(-2)=0$，则不等式 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ B．$(-2,0)\cup(0,2)$

C．$(-2,0)\cup(2,+\infty)$ D．$(-\infty,-2)\cup(0,2)$

11．已知 $a=2^{-\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}, c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}$，则（　　）

A．$a>b>c$ B．$a>c>b$ C．$c>a>b$ D．$c>b>a$

12．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\in[0,+\infty)\\ x^3+a^2-3a+2, x\in(-\infty,0)\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数,则常数 a 的取值范围是（　　）

A．$(1,2)$ B．$(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

C．$[1,2]$ D．$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

13．定义在 R 上的偶函数 $f(x)$，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-\frac{2}{x}$，则 $f(-\sqrt{5})$，$f(-2)$，$f(\pi)$ 的大小为（　　）

A．$f(-2)<f(-\sqrt{5})<f(\pi)$

B．$f(\pi)<f(-\sqrt{5})<f(-2)$

C．$f(-\sqrt{5})<f(-2)<f(\pi)$

D．$f(-2)<f(\pi)<f(-\sqrt{5})$

14．已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且对任意 x 都有 $f(x+2)=f(x)$．当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=2^x-1$，则 $f\left(\log_{\frac{1}{2}}6\right)$ 的值为（　　）

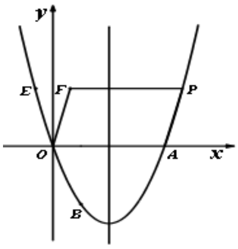
A．$-\frac{5}{2}$ B．-5 C．$-\frac{1}{2}$ D．-6

15．已知偶函数 f(x)在[0，＋∞)单调递减，f(2)＝0．若 f(x－1)>0，则 x 的取值范围是________．

16．设奇函数 y＝f(x) (x∈R)，满足对任意 t∈R 都有 f(t)＝f(1－t)，且 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时，f(x)＝－x2，则 $f(3)+f\left(-\frac{3}{2}\right)=$________．

17．在平面直角坐标系 xOy 中（O 为坐标原点），已知抛物线 y=x2＋bx＋c 过点 A（4，0），B（1，

—3）.



（1）求出该抛物线的函数解析式；

（2）设该抛物线的对称轴为直线 l，点 P（m，n）是抛物线上在第一象限的点，点 E 与点 P 关于直线 l 对称，点 E 与点 F 关于 y 轴对称．若四边形 OAPF 的面积为 48，求点 P 的坐标；

（3）在（2）的条件下，设 M 是直线 l 上任意一点，试判断 MP＋MA 是否存在最小值，若存在，求出这个最小值及相应的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

18．已知 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$．

（Ⅰ）求 $f(1)$ 的值；

（Ⅱ）若 $f(6)=1$，解不等式 $f(x+3)+f(\frac{1}{x})\le 2$．

19．已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0,+\infty)$，$f(2)=1$，$f(xy)=f(x)+f(y)$ 且 $x>1$ 时，$f(x)>0$

（1）求 $f(8)$ 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

（3）解不等式 $f(x)+f(x-2)\le 3$.

（二）导数

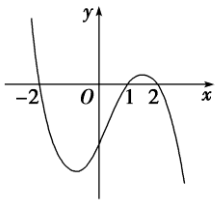
1．已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2+2$，若 $f'(-1)=4$，则 a 的值等于（　　）

A．$\frac{19}{3}$　　B．$\frac{16}{3}$　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{8}{3}$

2．函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-3)$ 的单调递减区间为（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)$　　D．$(3,+\infty)$

3．设函数 $f(x)$ 在 R 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是（　　）



A．函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$

B．函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$

C．函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

D．函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$

4．曲线 $y=\ln x+x$ 在点（1, $f(1)$）处的切线方程为（　　）

A．$y=2x-1$　　B．$y=-x+1$　　C．$y=x-1$　　D．$y=-2x+2$

5．设 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in R)$ 的导函数，$f(-2)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)>0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是_______.

6．已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x+1$ 有极大值和极小值，则实数 a 的取值范围是_______.

7．若曲线 $f(x)=x\sin x+1$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $ax+2y+1=0$ 互相垂直，则实数 $a=$_______.

8．设函数 $f(x)=ax^3+bx(a\neq 0)$ 的图象在点 $M(1, f(1))$ 处的切线方程为 $6x+y+4=0$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间，并求函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

9．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$．

（1）若 $a=-1$，求函数 $f(x)$ 的极值，并指出极大值还是极小值；

（2）若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最值；

（3）若 $a=1$，求证：在区间 $[1,+\infty)$ 上，函数 $f(x)$ 的图象在 $g(x)=\frac{2}{3}x^3$ 的图象下方．

10．已知函数 $f(x)=ax+\ln x\ (a\in\mathbf{R})$．

（1）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处切线的斜率；

（2）求 $f(x)$ 的单调区间；

（3）设 $g(x)=x^2-2x+2$，若对任意 $x_1\in(0,+\infty)$，均存在 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)<g(x_2)$，求 a 的取值范围．

考点四 三角函数与平面向量

一、要点回顾

（一）三角函数的图象与性质

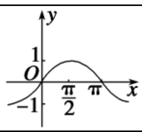
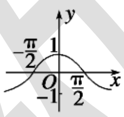
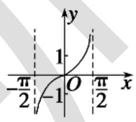
1．三角函数定义、同角关系与诱导公式

(1)定义：设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x，y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.各象限角的三角函数值的符号：一全正，二正弦，三正切，四余弦．

(2)同角关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$.

(3)诱导公式：在 $\frac{k\pi}{2}+\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$ 的诱导公式中“奇变偶不变，符号看象限”．

2．三角函数的图象及常用性质

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
单调性	在 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi，\frac{3\pi}{2}+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减	在 $[-\pi+2k\pi，2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增；在 $[2k\pi，\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上单调递减	在 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi，\frac{\pi}{2}+k\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增
对称性	对称中心：$(k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$；对称轴：$x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	对称中心：$(\frac{\pi}{2}+k\pi，0)(k\in\mathbf{Z})$；对称轴：$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$	对称中心：$(\frac{k\pi}{2}，0)(k\in\mathbf{Z})$

3.三角函数的两种常见变换

(1)$y=\sin x\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$

$y=\sin(x+\varphi)\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}$

$y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}$

$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$.

(2)$y=\sin x\xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍}}$

$y=\sin\omega x\xrightarrow[\text{平移}|\frac{\varphi}{\omega}|\text{个单位}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}$

$y=\sin(\omega x+\varphi)\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A\text{倍}}$

$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$.

（二）三角恒等变换与解三角形

1．两角和与差的正弦、余弦、正切公式

(1)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

(2)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

(3)$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

2．二倍角的正弦、余弦、正切公式

(1)$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

(2)$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

(3)$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

3．三角恒等式的证明方法

(1)从等式的一边推导变形到另一边，一般是化繁为简．

(2)等式的两边同时变形为同一个式子．

(3)将式子变形后再证明．

4．正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$($2R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆的直径).

变形：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$.

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

5．余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

推论：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

变形：$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$，$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，

$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

6．面积公式

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$.

7．解三角形

(1)已知两角及一边，利用正弦定理求解．

(2)已知两边及一边的对角，利用正弦定理或余弦定理求解，解的情况可能不唯一．

(3)已知两边及其夹角，利用余弦定理求解.

(4)已知三边，利用余弦定理求解.

（三）平面向量

1．平面向量中的五个基本概念

(1)零向量模的大小为 0，方向是任意的，它与任意非零向量都共线，记为 0.

(2)长度等于 1 个单位长度的向量叫单位向量，$\boldsymbol{a}$ 的单位向量为$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

(3)方向相同或相反的向量叫共线向量(平行向量).

(4)如果直线 l 的斜率为 k，则 $\boldsymbol{a}=(1，k)$是直线 l 的一个方向向量.

(5)向量的投影：$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\rangle$ 叫做向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影.

2．平面向量的两个重要定理

(1)向量共线定理：向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\neq 0)$与 $\boldsymbol{b}$ 共线当且仅当存在唯一一个实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(2)平面向量基本定理：如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1，λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，其中 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是一组基底.

3．平面向量的两个充要条件

若两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，则

(1)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

4．平面向量的三个性质

(1)若 $\boldsymbol{a}=(x，y)$，则$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{x^2+y^2}$.

(2)若 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(3)若 $\boldsymbol{a}=(x_1，y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2，y_2)$，θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，

则 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

二、考题预测

（一）三角函数的图象与性质

1．已知角 α,β 均为锐角，且 $\cos\alpha=\frac{3}{5},\tan(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$，则$\tan\beta=$（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{9}{13}$　　C．$\frac{13}{9}$　　D．3

2．若$\frac{\sin(\alpha-\pi)+\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}=3$，则 $\tan(\pi+\alpha)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．1　　D．-2

3．要得到函数 $y=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图像，只需将函数 $y=2\cos x$ 的图像上所有点（　　）

A．向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，再把横坐标缩短为原料的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变）

B．向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度，再把横坐标缩短为原料的$\dfrac{1}{2}$倍（纵坐标不变）

C．向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，再把横坐标缩短为原料的 2 倍（纵坐标不变）

D．向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位长度，再把横坐标缩短为原料的 2 倍（纵坐标不变）

4．已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的最小正周期是$\pi$，若其图像向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位后得到的函数为奇函数，则函数$y=f(x)$的图像（　　）

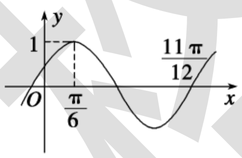
A．关于点$\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$对称　　　　B．关于直线$x=\dfrac{\pi}{12}$对称

C．关于点$\left(\dfrac{5\pi}{12},0\right)$对称　　　　D．关于直线$x=\dfrac{5\pi}{12}$对称

5．已知点$P\left(\sin\dfrac{3\pi}{4}，\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$落在角$\theta$的终边上，且$\theta\in[0,2\pi)$，则$\theta$的值为________.

6．已知角α的顶点与原点重合，始边与x轴的正半轴重合，终边上一点$P(-4,3)$，则$\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos(\frac{11\pi}{2}-\alpha)\sin(\frac{9\pi}{2}+\alpha)}$的值为________.

7．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0，|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则将$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，得到的图象解析式为________.



8．关于函数 f（x）=4sin（2x+$\dfrac{\pi}{3}$），（x∈R）有下列命题：

（1）y=f（x）是以 2π 为最小正周期的周期函数；

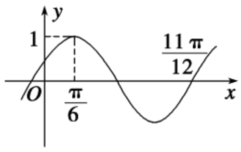
（2）y=f（x）可改写为 y=4cos（2x－$\dfrac{\pi}{6}$）；

（3）y=f（x）的图象关于（－$\dfrac{\pi}{6}$，0）对称；

（4）y=f（x）的图象关于直线 x=－$\dfrac{\pi}{6}$对称；

其中真命题的序号为________.

9．函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则将 $y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，得到的图象解析式为________．



10．已知函数 $f(x)=A\sin(3x+\varphi)(A>0,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ 0<\varphi<\pi)$在 $x=\frac{\pi}{12}$时取得最大值 4．

(1)求 $f(x)$的最小正周期；

(2)求 $f(x)$的解析式；

(3)若 $f(\frac{2}{3}\alpha+\frac{\pi}{12})=\frac{12}{5}$，求 $\sin\alpha$．

（二）三角恒等变换与解三角形

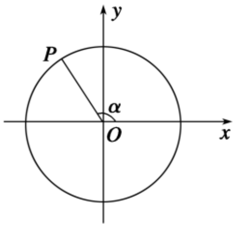
1．设ΔABC的内角 A，B，C 所对边的长分别是 a，b，c，且 $b=3$，$c=1$，$A=2B$．则 a 的值为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

2．设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 bcos C＋ccos B＝asin A，则△ABC 的形状为（　　）

A．锐角三角形　　B．直角三角形　　C．钝角三角形　　D．不确定

3．如图，以 Ox 为始边作角 α（$0<\alpha<\pi$），终边与单位圆相交于点 P，已知点 P 的坐标为$\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$，则$\frac{\sin2\alpha+\cos2\alpha+1}{1+\tan\alpha}=$________．



4．已知 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})+\sin\alpha=-\frac{4\sqrt{3}}{5}$，$-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$，则 $\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})=$________.

5．$\triangle ABC$的三个内角 A，B，C所对的边分别为 a，b，c，$a\sin A\sin B+b\cos^2 A=\sqrt{2}a$，则$\frac{b}{a}=$________.

6．在$\triangle ABC$中，内角 A，B，C所对的边分别是 a，b，c．若 $c^2=(a-b)^2+6$，$C=\frac{\pi}{3}$，则$\triangle ABC$的面积是________.

7．设函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\sin^2 x$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期和最大值；

(2)若 θ 是第二象限角，且 $f(\frac{\theta}{2})=0$，求$\frac{\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta-\sin 2\theta}$的值.

8．已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x+1$.

（I）求函数 $f(x)$的最小正周期；

（II）将函数 $f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位，得到函数 $g(x)$的图象．在ΔABC中，角 A，B，C 的对边分别为 a,b,c，若 $g\left(\frac{A}{2}\right)=1, a=2, b+c=4$，求 ΔABC 的面积.

9．设函数 $f(x)=\sin^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x-\cos^2\omega x+\lambda(x\in\mathbf{R})$的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，其中 ω，λ 为常数，且 $\omega\in(\frac{1}{2},1)$.

(1)求函数 $f(x)$的最小正周期；

(2)若 $y=f(x)$的图象经过点$(\frac{\pi}{4},0)$，求函数 $f(x)$在 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$上的值域.

10．已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x-\sqrt{3}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和单调减区间；

（2）已知 ΔABC 的三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，其中 $a=7$，若锐角 A 满足 $f(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，且 $\sin B+\sin C=\frac{13\sqrt{3}}{14}$，求 bc 的面积.

（三）平面向量

1．在下列向量组中，可以把向量 $\boldsymbol{a}=(3,2)$表示出来的是（　　）.

A．$\boldsymbol{e}_1=(0,0)$，$\boldsymbol{e}_2=(1,2)$

B．$\boldsymbol{e}_1=(-1,2)$，$\boldsymbol{e}_2=(5,-2)$

C．$\boldsymbol{e}_1=(3,5)$，$\boldsymbol{e}_2=(6,10)$

D．$\boldsymbol{e}_1=(2,-3)$，$\boldsymbol{e}_2=(-2,3)$

2．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,0)$，$\vec{c}=(4,-3)$．若λ为实数且$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{c}$，则$\lambda=$（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

3．已知平面直角坐标系内的两个向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(m,3m-2)$，且平面内的任一向量$\vec{c}$都可以唯一的表示成$\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$（$\lambda,\mu$为实数），则实数$m$的取值范围是（　　）

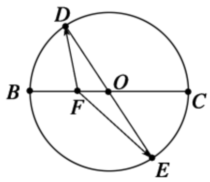
A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$

C．$(-\infty,+\infty)$　　D．$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

4．已知向量$\vec{a},\vec{b}$满足$(\vec{a}+2\vec{b})\bullet(\vec{a}-\vec{b})=-6$，且$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影为________．

5．已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$，且$|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为________．

6．如图，BC、DE是半径为1的圆O的两条直径，$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FO}$，则$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=$________．



7．已知向量$\boldsymbol{a}=\left(\sin x,\ \frac{3}{4}\right)$，$\boldsymbol{b}=(\cos x,\ -1)$．

(1)当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时，求$\cos^2x-\sin2x$的值；

(2)设函数$f(x)=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}$，已知在△$ABC$中，内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，若$a=\sqrt{3}$，$b=2$，$\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，求$f(x)+4\cos(2A+\frac{\pi}{6})$（$x\in[0,\frac{\pi}{3}]$）的取值范围．

考点五 数列

一、要点回顾

（一）等差数列与等比数列

1．a_n与S_n的关系$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq 2.\end{cases}$

2．等差数列和等比数列

	等差数列	等比数列
定义	$a_n-a_{n-1}=$常数$(n\geq 2)$	$\frac{a_n}{a_{n-1}}=$常数$(n\geq 2)$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}(q\neq 0)$
判定方法	(1)定义法 (2)中项公式法：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\geq 1)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列 (3)通项公式法：$a_n=pn+q$($p$、$q$为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列 (4)前$n$项和公式法：$S_n=An^2+Bn$($A$、$B$为常数)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等差数列 (5)$\{a_n\}$为等比数列，$a_n>0\Leftrightarrow\{\log_a a_n\}$为等差数列	(1)定义法 (2)中项公式法：$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(n\geq 1)(a_n\neq 0)\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列 (3)通项公式法：$a_n=c\cdot q^n$($c$、$q$均是不为0的常数，$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$为等比数列 (4)$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow\{a^{a_n}\}$为等比数列($a>0$且$a\neq 1$)
性质	(1)若m、n、p、$q\in\mathbf{N}^*$，且$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$ (2)$a_n=a_m+(n-m)d$ (3)S_m，$S_{2m}-S_m$，$S_{3m}-S_{2m}$，…，仍成等差数列	(1)若m、n、p、$q\in\mathbf{N}^*$，且$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ (2)$a_n=a_mq^{n-m}$ (3)等比数列依次每n项和($S_n\neq 0$)仍成等比数列
前n项和	$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	(1)$q\neq 1$，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ (2)$q=1$，$S_n=na_1$

（二）数列求和及综合应用

(1)分组转化法

有些数列，既不是等差数列，也不是等比数列，若将数列通项拆开或变形，可转化为几个等差、等比数列或常见的数列，即先分别求和，然后再合并.

(2)错位相减法

这是在推导等比数列的前n项和公式时所用的方法，这种方法主要用于求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和，其中$\{a_n\}$，$\{b_n\}$分别是等差数列和等比数列.

(3)倒序相加法

这是在推导等差数列前 n 项和公式时所用的方法，也就是将一个数列倒过来排列(反序)，当它与原数列相加时若有公式可提，并且剩余项的和易于求得，则这样的数列可用倒序相加法求和.

(4)裂项相消法

利用通项变形，将通项分裂成两项或 n 项的差，通过相加过程中的相互抵消，最后只剩下有限项的和.这种方法适用于求通项为$\frac{1}{a_na_{n+1}}$的数列的前 n 项和，其中$\{a_n\}$若为等差数列，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$.

常见的裂项公式：

①$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

②$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k})$；

③$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$；

④$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$.

二、考题预测

（一）等差数列与等比数列

1．设 S_n 为公差不为零的等差数列$\left\{a_n\right\}$的前 n 项和，若 $S_9=3a_8$，则 $\frac{S_{15}}{3a_5}$（　　）

A．15　　B．17　　C．19　　D．21

2．设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=1$，公差 $d=2$，$S_{n+2}-S_n=36$，则 $n=$（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

3．已知等比数列$\left\{a_n\right\}$中, $a_1+a_6=33$，$a_2a_5=32$，公比 $q>1$，则 $a_3+a_8=$（　　）

A．66　　B．132　　C．64　　D．128

4．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足 $a_1=3$，且 $a_{n+1}=4a_n+3\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式为（　　）

A．$2^{2n-1}+1$　　B．$2^{2n-1}-1$　　C．$2^{2n}+1$　　D．$2^{2n}-1$

5．在等差数列$\left\{a_n\right\}$中，若 $a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$，则 $2a_{10}-a_{12}$ 的值为（　　）

A．20　　B．22　　C．24　　D．28

6．等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_2+a_4+a_6=12$，则 S_7 的值是________.

7．已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$S_{11}=\frac{99}{2}$，则 a_{12} 的值是________.

8．设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $-1<a_3<1, 0<a_6<3$，则 S_9 的取值范围是________.

9．若等差数列$\{a_n\}$满足 $a_7+a_8+a_9>0$，$a_7+a_{10}<0$，则当 $n=$________时，$\{a_n\}$的前 n 项和最大.

10．成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 2、5、13 后成为等比数列$\{b_n\}$中的 b_3、b_4、b_5.

(1)求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，求证：数列$\{S_n+\frac{5}{4}\}$是等比数列.

（二）数列求和及综合应用

1. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知$a_1=-11, a_3+a_7=-6$，当S_n取得最小值是，$n=$(　　)

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

2．设S_n, T_n分别是等差数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前 n 项和，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{n}{2n+1}(n\in N^*)$，则$\frac{a_5}{b_6}=$（　　）

A．$\frac{5}{13}$　　B．$\frac{9}{19}$　　C．$\frac{11}{23}$　　D．$\frac{9}{23}$

3．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1>0$且$\frac{a_6}{a_5}=\frac{9}{11}$，当$S_n$取最大值时，$n$的值为（　　）

A．9　　B．10　　C．11　　D．12

4．已知两个等差数到$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n和T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{7n-3}{n+1}$，则$\frac{a_5}{b_5}=$（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

5．已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=-60$，$a_{n+1}=a_n+3$，则$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|=$________.

6．已知等差数列$\{a_n\}$，公差 $d>0$，前 n 项和为 S_n，$S_3=6$，且满足 $a_3-a_1, 2a_2$，a_8成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

7．已知等差数列$\left\{a_n\right\}$首项$a_1=1$，公差为d，且数列$\left\{2^{a_n}\right\}$是公比为 4 的等比数列，

（1）求d；

（2）求数列$\left\{a_n\right\}$的通项公式a_n及前n项和S_n；

（3）求数列$\{\dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\}$的前$n$项和$T_n$.

8．已知数列$\{a_n\}$满足 a1＝1，a3＋a7＝18，且$a_{n-1}+a_{n+1}=2a_n$（n≥2）.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$c_n = 2^{n-1} \cdot a_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和T_n.

考点六 不等式

一、要点回顾

（一）几类不等式的解法

1.一元二次不等式的解法

先化为一般形式 $ax^2+bx+c>0(a\neq0)$，再求相应一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根，最后根据相应二次函数图象与 x 轴的位置关系，确定一元二次不等式的解集.

2.简单分式不等式的解法

①变形 $\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}>0(<0)\Leftrightarrow f(x)g(x)>0(<0)$；

②变形 $\Rightarrow\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant0(\leqslant0)\Leftrightarrow f(x)g(x)\geqslant0(\leqslant0)$且 $g(x)\neq0$.

3.简单指数不等式的解法

①当 $a>1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

②当 $0<a<1$ 时，$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

4.简单对数不等式的解法

①当 $a>1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$且 $f(x)>0$，$g(x)>0$；

②当 $0<a<1$ 时，$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$且 $f(x)>0$，$g(x)>0$.

5．含有绝对值的不等式的解法

(1)$|f(x)|>a(a>0)\Leftrightarrow f(x)>a$ 或 $f(x)<-a$；

(2)$|f(x)|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<f(x)<a$；

(3)对形如$|x-a|+|x-b|\leqslant c$，$|x-a|+|x-b|\geqslant c$ 的不等式，可利用绝对值不等式的几何意义求解.

（4）含有绝对值的不等式的性质

$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$.

（二）基本不等式

1.$a^2+b^2\geqslant2ab(a、b\in\mathbf{R})$.

2.$\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0，b>0)$.

3.$ab\leqslant(\dfrac{a+b}{2})^2(a，b\in\mathbf{R})$.

4.$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2ab}{a+b}(a>0，b>0)$.

（三）简单的线性规划

1.线性规划问题的有关概念

线性约束条件

线性目标函数

可行域

最优解

2.解不含实际背景的线性规划问题的一般步骤：①画出可行域；②根据线性目标函数的几何意义确定最优解；③求出目标函数的最大值或者最小值．

二、考题预测

（一）几类不等式的解法

1．若a,b,c为实数，则下列命题正确的是（　　）

A．若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

B．若$a<b<0$，则$a^2>ab>b^2$

C．若$a<b<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

D．若$a<b<0$，则$\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

2．不等式$|x-1|+|x+3|\le 6$的解集为（　　）

A．[-4，2]　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(-\infty,-4]$　　D．$(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$

3．已知函数$f(x)=x^2-\cos x$，则$f(-0.5)$，$f(0)$，$f(0.6)$的大小关系是（　　）

A．$f(0)<f(-0.5)<f(0.6)$

B．$f(-0.5)<f(0.6)<f(0)$

C．$f(0)<f(0.6)<f(-0.5)$

D．$f(-0.5)<f(0)<f(0.6)$

4．不等式$ax^2+bx+2>0$的解集是$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$，则$a+b$的值是（　　）

A．10　　B．－14　　C．14　　D．－10

5．若关于x的不等式$2x^2-3x+a<0$的解集为$(m,1)$，则实数$m=$________．

6．函数$f(x)=\begin{cases}-x+1, & (x<0),\\ x-1, & (x\ge 0),\end{cases}$则不等式$x+(x+1)f(x+1)\le 1$的解集是________．

7．设函数$f(x)=|x-a|+3x$，其中$a>0$．

(1)当$a=1$时，求不等式$f(x)\ge 3x+2$的解集；

(2)若不等式$f(x)\le 0$的解集为$\{x|x\le -1\}$，求a的值．

（二）基本不等式

1．下列不等式一定成立的是（　　）.

A．$\lg\left(x^2+\frac{1}{4}\right)>\lg x(x>0)$　　B．$\sin x+\frac{1}{\sin x}\geq 2(x\neq k\pi，k\in Z)$

C．$x^2+1\geq 2|x|(x\in R)$　　D．$\frac{1}{x^2+1}>1(x\in R)$

2．已知点 $A(m,n)$ 在直线 $x+2y=1$ 上，其中 $mn>0$，则 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．8　　C．9　　D．12

3．设 $a>0,b>1$，若 $a+b=2$，则 $\frac{3}{a}+\frac{1}{b-1}$ 的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{3}$　　B．8　　C．$4\sqrt{3}$　　D．$4+2\sqrt{3}$

4．若点 A(1,1)在直线 $2mx+ny-2=0$ 上，其中 $mn>0$，则 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值为________.

5. 已知 $x>0,y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，若 $x+2y>m^2+2m$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

（三）简单的线性规划

1．已知变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-5\leqslant 0,\\x-2y+1\leqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=x+2y-1$ 的最大值为_______.

2．若 x，y 满足条件 $\begin{cases}x-y\leq 0,\\x+y\geq 0,\\y\leq a,\end{cases}$ 且 $z=2x+3y$ 的最大值是 5，则实数 a 的值为________.

3．已知实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x>0,\\4x+3y\leq 4\\y\geq 0\end{cases}$，则 $w=\frac{y+1}{x}$ 的最小值是________.

4．若点 P(x，y)满足线性约束条件 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y\leq 0,\\x-\sqrt{3}y+2\geq 0,\\y\geq 0,\end{cases}$ 点 A(3，$\sqrt{3}$)，O 为坐标原点，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最大值为________.

5．当实数 x，y 满足 $\begin{cases}x+2y-4\leqslant 0,\\x-y-1\leqslant 0,\\x\geqslant 1\end{cases}$ 时，$1\leqslant ax+y\leqslant 4$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

考点七 推理证明

一、考点

1.合情推理

(1)归纳推理

①归纳推理是由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理.

②归纳推理的思维过程如下：

$\boxed{\text{实验、观察}}\to\boxed{\text{概括、推广}}\to\boxed{\text{猜测一般性结论}}$

(2)类比推理

①类比推理是由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理.

②类比推理的思维过程如下：

$\boxed{\text{观察、比较}}\to\boxed{\text{联想、类推}}\to\boxed{\text{猜测新的结论}}$

2.演绎推理

(1)“三段论”是演绎推理的一般模式，包括：

①大前提——已知的一般原理；

②小前提——所研究的特殊情况；

③结论——根据一般原理，对特殊情况做出的判断.

(2)合情推理与演绎推理的区别

归纳和类比是常用的合情推理，从推理形式上看，归纳是由部分到整体、个别到一般的推理；类比是由特殊到特殊的推理；而演绎推理是由一般到特殊的推理.从推理所得的结论来看，合情推理的结论不一定正确，有待进一步证明；演绎推理在大前提、小前提和推理形式都正确的前提下，得到的结论一定正确.

3.直接证明

(1)综合法

用 P 表示已知条件、已有的定义、定理、公理等，Q 表示所要证明的结论，则综合法可用框图表示为：

$\boxed{P\Rightarrow Q_1}\to\boxed{Q_1\Rightarrow Q_2}\to\boxed{Q_2\Rightarrow Q_3}\to\cdots\to\boxed{Q_n\Rightarrow Q}$

(2)分析法

用 Q 表示要证明的结论，则分析法可用框图表示为：

$\boxed{Q\Leftarrow P_1}\to\boxed{P_1\Leftarrow P_2}\to\boxed{P_2\Leftarrow P_3}\to\cdots\to\boxed{\text{得到一个明显成立的条件}}$

4.间接证明

反证法的证明过程可以概括为“否定——推理——否定”，即从否定结论开始，经过正确的推理，导致逻辑矛盾，从而达到新的否定(即肯定原命题)的过程.用反证法证明命题“若 p，则 q”的过程可以用如图所示的框图表示.

肯定条件 p 否定结论 q → 导致逻辑矛盾 → “既 p，又綈 q”为假 → “若 p，则 q”为真

5.数学归纳法

数学归纳法证明的步骤：

(1)证明当 n 取第一个值 $n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$时命题成立.

(2)假设 $n=k(k\in\mathbf{N}^*$，且 $k\geq n_0)$时命题成立，证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

由(1)(2)可知，对任意 $n\geq n_0$，且 $n\in\mathbf{N}^*$时，命题都成立.

二、考题预测

1．设 $f(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$（$n>2$，$n\in N$），经计算可得 $f(4)>2$，$f(8)>\frac{5}{2}$，$f(16)>3$，$f(32)>\frac{7}{2}$．观察上述结果，可得出的一般结论是（　　）

A．$f(2n)>\frac{2n+1}{2}$（$n\geq2$，$n\in N$）

B．$f(n^2)\geq\frac{n+2}{2}$（$n\geq2$，$n\in N$）

C．$f(2^n)>\frac{n+2}{2}$（$n\geq2$，$n\in N$）

D．$f(2^n)\geq\frac{n+2}{2}$（$n\geq2$，$n\in N$）

2．证明不等式 $\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a-1}-\sqrt{a-2}$（$a\geq2$）所用的最适合的方法是（　　）

A．综合法　　B．分析法　　C．间接证法　　D．合情推理法

3．用反证法证明命题“若 $a^2+b^2=0$，则 a、b 全为 0（a、$b\in R$）”，其反设正确的是（　　）

A．a、b 至少有一个为 0　　B．a、b 至少有一个不为 0

C．a、b 全不为 0　　D．a、b 中只有一个为 0

4.观察下列各式：$a+b=1$，$a^2+b^2=3$，$a^3+b^3=4$，$a^4+b^4=7$，$a^5+b^5=11$，…，则 $a^{10}+b^{10}=$________.

5．甲、乙、丙三位同学被问到是否去过 A，B，C 三个城市时，

甲说：我去过的城市比乙多，但没去过 B 城市；

乙说：我没去过 C 城市；

丙说：我们三人去过同一城市．

由此判断乙去过的城市为________．

第二部分 几何

考点一 平面几何

一、要点回顾

（一）三角形

1.全等三角形

三角形全等的判定定理：

（1）边角边定理：有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）

（2）角边角定理：有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）

（3）角角边定理：有两角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角角边”或“AAS”）

（4）边边边定理：有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）.

（5）直角三角形全等的判定：

对于特殊的直角三角形，判定它们全等时，还有 HL 定理（斜边、直角边定理）：有斜边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）

2.相似三角形

（1）三角形相似的判定方法

①定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似

②平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似

③判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，可简述为两角对应相等，两三角形相似.

④判定定理 2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似，可简述为两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.

⑤判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似，可简述为三边对应成比例，两三角形相似

（2）直角三角形相似的判定方法

①以上各种判定方法均适用

②定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似

③垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.

3.等腰三角形

等腰三角形的性质与判定		
	等腰三角形性质	等腰三角形判定

线	1.等腰三角形底边上的中线垂直底边，平分顶角； 2.等腰三角形两腰上的中线相等，并且它们的交点与底边两端点距离相等．	1.两边上中线相等的三角形是等腰三角形； 2.如果一个三角形的一边中线垂直这条边（平分这个边的对角），那么这个三角形是等腰三角形
平分线	1.等腰三角形顶角平分线垂直平分底边； 2.等腰三角形两底角平分线相等，并且它们的交点到底边两端点的距离相等．	1.如果三角形的顶角平分线垂直于这个角的对边（平分对边），那么这个三角形是等腰三角形； 2.三角形中两个角的平分线相等，那么这个三角形是等腰三角形．
线	1.等腰三角形底边上的高平分顶角、平分底边； 2.等腰三角形两腰上的高相等，并且它们的交点和底边两端点距离相等．	1.如果一个三角形一边上的高平分这条边（平分这条边的对角），那么这个三角形是等腰三角形； 2.有两条高相等的三角形是等腰三角形．
	等边对等角	等角对等边
	底的一半<腰长<周长的一半	两边相等的三角形是等腰三角形

4 三角形中的中位线

（1）三角形共有三条中位线，并且它们又重新构成一个新的三角形．

（2）要会区别三角形中线与中位线．

三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半．

三角形中位线定理的作用：

位置关系：可以证明两条直线平行．

数量关系：可以证明线段的倍分关系．

常用结论：任一个三角形都有三条中位线，由此有：

结论 1：三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半．

结论 2：三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形．

结论 3：三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形．

结论 4：三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分．

结论 5：三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等．

（二）四边形

1.平行四边形

1.1 平行四边形的性质

（1）平行四边形的邻角互补，对角相等．

（2）平行四边形的对边平行且相等．

推论：夹在两条平行线间的平行线段相等．

（3）平行四边形的对角线互相平分．

（4）若一直线过平行四边形两对角线的交点，则这条直线被一组对边截下的线段以对角线的交点为中点，并且这两条直线二等分此平行四边形的面积．

1.2 平行四边形的判定

（1）定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形

（2）定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形

（3）定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形

（4）定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形

（5）定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

1.3 两条平行线的距离

两条平行线中，一条直线上的任意一点到另一条直线的距离，叫做这两条平行线的距离．

平行线间的距离处处相等．

1.4 平行四边形的面积

$S_{平行四边形}$=底边长×高=ah

2.矩形

2.1 矩形的性质

（1）具有平行四边形的一切性质（2）矩形的四个角都是直角

（3）矩形的对角线相等（4）矩形是轴对称图形

2.2 矩形的判定

（1）定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形

（2）定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形

（3）定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形

2.3 矩形的面积

$S_{矩形}$=长×宽=ab

3.菱形

3.1 菱形的性质

（1）具有平行四边形的一切性质

（2）菱形的四条边相等

（3）菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角

（4）菱形是轴对称图形

3.2 菱形的判定

（1）定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形

（2）定理 1：四边都相等的四边形是菱形

（3）定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形

3.3 菱形的面积

$S_{菱形}$=底边长×高=两条对角线乘积的一半

4.正方形

4.1 正方形的性质

（1）具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质

（2）正方形的四个角都是直角，四条边都相等

（3）正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角

（4）正方形是轴对称图形，有 4 条对称轴

（5）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形

（6）正方形的一条对角线上的一点到另一条对角线的两端点的距离相等.

4.2 正方形的判定

（1）判定一个四边形是正方形的主要依据是定义，途径有两种：

先证它是矩形，再证有一组邻边相等.

先证它是菱形，再证有一个角是直角.

（2）判定一个四边形为正方形的一般顺序如下：

先证明它是平行四边形；

再证明它是菱形（或矩形）；

最后证明它是矩形（或菱形）

4.3 正方形的面积

设正方形边长为 a，对角线长为 b

$$S_{正方形}=a^2=\frac{b^2}{2}$$

5.梯形

5. 1 梯形的判定

（1）定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形.

（2）一组对边平行且不相等的四边形是梯形.

5. 2 等腰梯形的性质

（1）等腰梯形的两腰相等，两底平行.

（3）等腰梯形的对角线相等.

（4）等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线.

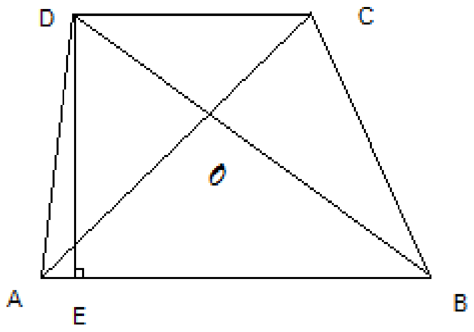
5. 3 等腰梯形的判定

（1）定义：两腰相等的梯形是等腰梯形

（2）定理：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形

（3）对角线相等的梯形是等腰梯形.

5. 4 梯形的面积



（1）如图，$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(CD+AB)\bullet DE$

（2）梯形中有关图形的面积：

①$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BAC}$；②$S_{\Delta AOD}=S_{\Delta BOC}$；③$S_{\Delta ADC}=S_{\Delta BCD}$

5.5 梯形中位线定理

梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半

（三）圆

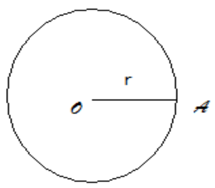
1.基本概念

1.1 圆的定义

在一个个平面内，线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周，另一个端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆，固定的端点 O 叫做圆心，线段 OA 叫做半径．

1.2 圆的几何表示

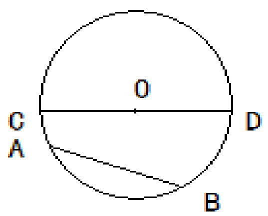
以点 O 为圆心的圆记作“⊙O”，读作“圆 O”



1.3 弦、弧等与圆有关的定义

（1）弦

连接圆上任意两点的线段叫做弦．（如图中的 AB）



（2）直径

经过圆心的弦叫做直径．（如途中的 CD）

直径等于半径的 2 倍．

（3）半圆

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆.

（4）弧、优弧、劣弧

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.

弧用符号“⌒”表示，以 A，B 为端点的弧记作“$\overset{\frown}{AB}$”，读作“圆弧 AB”或“弧 AB”.

大于半圆的弧叫做优弧（多用三个字母表示）；小于半圆的弧叫做劣弧（多用两个字母表示）

（5）圆心角

顶点在圆心的角叫做圆心角.

（6）弦心距

从圆心到弦的距离叫做弦心距.

（7）弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦想等，所对的弦的弦心距相等.

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

1.4 弧长和扇形面积

（1）弧长公式

n°的圆心角所对的弧长 l 的计算公式为$l=\dfrac{n\pi r}{180}$

（2）扇形面积公式

$$S_{扇}=\frac{n}{360}\pi R^2=\frac{1}{2}lR$$

其中 n 是扇形的圆心角度数，R 是扇形的半径，l 是扇形的弧长.

（3）圆锥的侧面积

$$S=\frac{1}{2}l\bullet 2\pi r=\pi rl$$

其中 l 是圆锥的母线长，r 是圆锥的地面半径.

1.5 外接圆和内切圆

（1）三角形的外接圆：经过三角形的三个顶点的圆叫做三角形的外接圆.

（2）三角形的外心：三角形的外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，它叫做这个三角形的外心.

（3）圆内接四边形性质（四点共圆的判定条件）：圆内接四边形对角互补.

（4）三角形的内切圆：与三角形的各边都相切的圆叫做三角形的内切圆.

（5）三角形的内心：三角形的内切圆的圆心是三角形的三条内角平分线的交点，它叫做三角形的内心.

1.6 圆的对称性

（1）圆的轴对称性

圆是轴对称图形，经过圆心的每一条直线都是它的对称轴.

（2）圆的中心对称性

圆是以圆心为对称中心的中心对称图形.

1.7 圆周角

（1）圆周角：顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.

（2）圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90° 的圆周角所对的弦是直径.

推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

1.8 点和圆的位置关系

设⊙O 的半径是 r，点 P 到圆心 O 的距离为 d，则有：

$d<r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 内；

$d=r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 上；

$d>r \Leftrightarrow$ 点 P 在⊙O 外.

2. 直线与圆的位置关系

（1）相交：直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交，这时直线叫做圆的割线，公共点叫做交点；

（2）相切：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，这时直线叫做圆的切线，

（3）相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离.

如果⊙0 的半径为 r，圆心 0 到直线 l 的距离为 d, 那么：

直线 l 与⊙0 相交 $\Leftrightarrow d<r$；

直线 l 与⊙0 相切 $\Leftrightarrow d=r$；

直线 l 与⊙0 相离 $\Leftrightarrow d>r$；

3.圆和圆

（1）圆和圆的位置关系

如果两个圆没有公共点，那么就说这两个圆相离，相离分为外离和内含两种.

如果两个圆只有一个公共点，那么就说这两个圆相切，相切分为外切和内切两种.

如果两个圆有两个公共点，那么就说这两个圆相交.

（2）圆心距

两圆圆心的距离叫做两圆的圆心距.

（3）圆和圆位置关系的性质与判定

设两圆的半径分别为 R 和 r，圆心距为 d，那么

两圆外离 $\Leftrightarrow$ d>R+r

两圆外切 $\Leftrightarrow$ d=R+r

两圆相交 $\Leftrightarrow$ R-r<d<R+r（R≥r）

两圆内切 $\Leftrightarrow$ d=R-r（R>r）

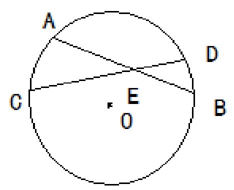
两圆内含 $\Leftrightarrow$ d<R-r（R>r）

（4）两圆相切、相交的重要性质

如果两圆相切，那么切点一定在连心线上，它们是轴对称图形，对称轴是两圆的连心线；相交的两个圆的连心线垂直平分两圆的公共弦.

4. 相关定理

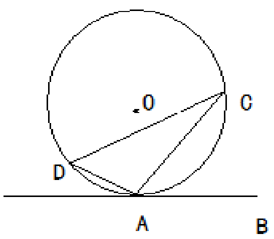
4. 1 相交弦定理：⊙O 中，弦 AB 与弦 CD 相交与点 E，则 AE $\bullet$ BE=CE $\bullet$ DE



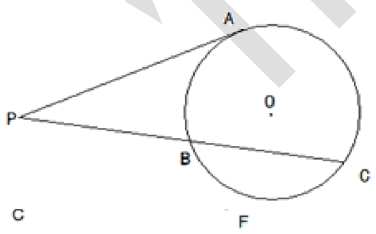
4.2 弦切角

弦切角：圆的切线与经过切点的弦所夹的角，叫做弦切角.

弦切角定理：弦切角等于弦与切线夹的弧所对的圆周角.即：∠BAC=∠ADC



4.3 切割线定理：PA 为⊙O 切线，PBC 为⊙O 割线，则 $PA^2 = PB \bullet PC$



4.4 切线的判定定理

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

4.5 切线的性质定理

圆的切线垂直于经过切点的半径.

4.6 切线长定理

从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这一点的连线平分两条切线的夹角.

4.7 垂径定理及其推论

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

推论 1：（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

（3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

垂径定理及其推论可概括为：

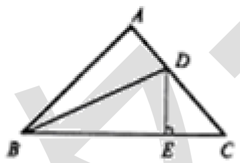
直径 { 过圆心、垂直于弦、平分弦、平分弦所对的优弧、平分弦所对的劣弧 } 知二推三

过圆心
垂直于弦
平分弦
平分弦所对的优弧
平分弦所对的劣弧

二、考题预测

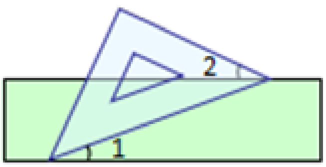
（一）三角形

1．如图，△ABC 中，∠A=90°，AB=AC，BD 平分∠ABC 交 AC 于 D,DE⊥BC 于点 E，且 BC=6，则△DEC 的周长是（　　）



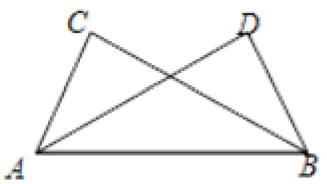
A．12 cm　　B．10 cm　　C．6cm　　D．以上都不对

2．如图，把一块含有 45°角的直角三角板的两个顶点放在直尺的对边上．如果∠1=20º，那么∠2 的度数是（　　）



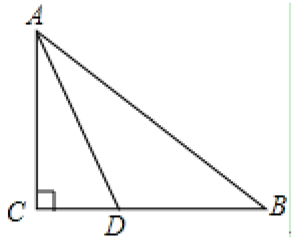
A．15º　　B．20º　　C．25º　　D．30º

3．如图，∠CAB＝∠DBA，再添加一个条件，不一定能判△ABC≌△BAD 的是（　　）

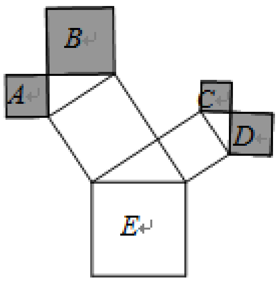


A．AC＝BD　　　　B．AD＝BC　　　　C．∠DAB ＝∠CBA　D．∠C＝∠D

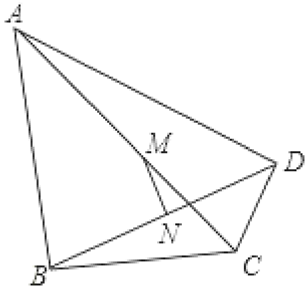
4．如图，△ABC 中，∠C=90°，AD 平分∠BAC，AB=5，CD=2，则△ABD 的面积是____________．



5．如图是一株美丽的勾股树，其中所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，若正方形 A、B、C、D 的面积分别为 2，5，1，2，则最大的正方形 E 的面积是________．



6．如图，∠ABC=∠ADC=90°，M、N 分别是 AC、BD 的中点．求证：MN⊥BD．



（二）四边形

1．下列说法不正确的是（　　）

A．一组邻边相等的矩形是正方形

B．对角线相等的菱形是正方形

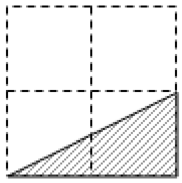
C．对角线互相垂直的矩形是正方形

D．有一个角是直角的平行四边形是正方形

2．菱形的两条对角线长分别是 6 和 8，则此菱形的边长是（　　）

A．10　　B．8　　C．6　　D．5

3．在 2×2 的方格中，再画出一个三角形，要求所画三角形是图中三角形经过轴对称变换后得到的图形，且所画三角形顶点与方格中的小正方形顶点重合，有（　　）种画法.



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

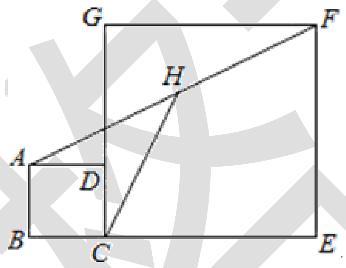
4．下列图标中，属于中心对称的是（　　）

A.　　B.　　C.　　D.

5．已知正 n 边形的一个内角为 135°，则边数 n 的值是（　　）

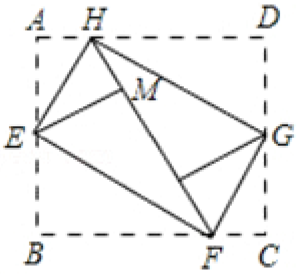
A．10　　B．8　　C．7　　D．6

6．如图，正方形 ABCD 和正方形 CEFG 中，点 D 在 CG 上，BC=$\sqrt{2}$，CE=3$\sqrt{2}$，H 是 AF 的中点，那么 CH 的长是（　　）



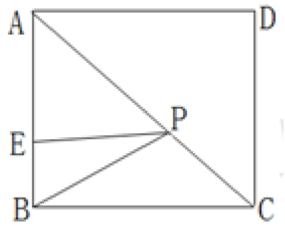
A．3.5　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{10}$　　D．$2\sqrt{5}$

7．如图，将矩形纸片 ABCD 的四个角向内折起，恰好拼成一个无缝隙无重叠的四边形 EFGH，若 EH=3，EF=4，则边 AD 的长是（　　）

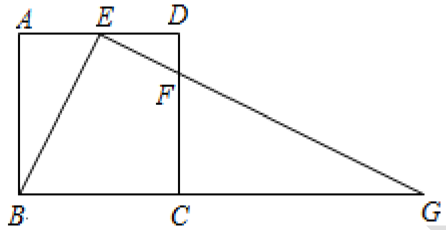


A．2　　B．3　　C．4．8　　D．5

8．如图，正方形 ABCD 中，点 E 在边 AB 上，且 BE=$\sqrt{2}$，AE=3BE，点 P 在线段 AC 上的运动，则 PE+PB 的最小值为__________.



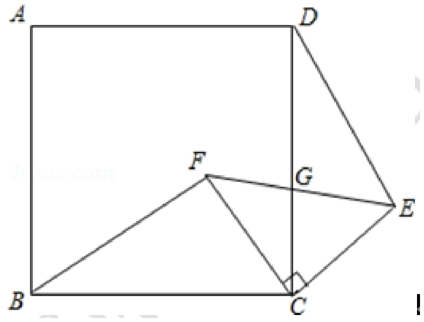
9．如图，在正方形 ABCD 中，E、F 分别是边 AD、CD 上的点，$AE=ED,DF=\frac{1}{4}DC$，连接 EF 并延长交 BC 的延长线于点 G.



（1）求证：$\Delta ABE \backsim \Delta DEF$；

（2）若正方形的边长为 4，求 BG 的长.

10．如图，四边形 ABCD 是正方形，△ECF 是等腰直角三角形，其中 CE=CF，G 是 CD 与 EF 的交点.



（1）求证：△BCF≌△DCE；

（2）求证：BF=DE，BF⊥DE；

（3）若 BC=5，CF=3，∠BFC=90°，求 DG：GC 的值．

（三）圆

1．下列四个命题：

①直径是弦；

②经过三个点一定可以作圆；

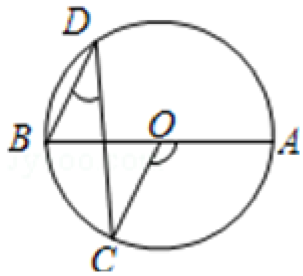
③三角形的外心到三角形各顶点的距离都相等；

④半径相等的两个半圆是等弧．

其中正确的有（　　）

A．4 个　　　B．3 个　　　C．2 个　　　D．1 个

2．如图，AB 是⊙O 直径，∠AOC=130°，则∠D=（　　）

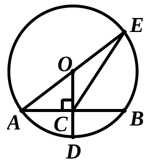


A．65°　　　　B．25°　　　　C．15°　　　　D．35°

3．圆锥体的高 h=2$\sqrt{3}$ cm，底面半径 r=2cm，则圆锥体的全面积为（　　）cm^2.

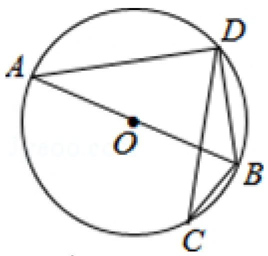
A．4$\sqrt{3}$π　　　　B．8π　　　　C．12π　　　　D．（4$\sqrt{3}$+4）π

4．如图，⊙O 的半径 OD⊥弦 AB 于点 C，连结 AO 并延长交⊙O 于点 E，连结 EC 若 AB＝8，CD＝2，则 EC 的长为（　　）

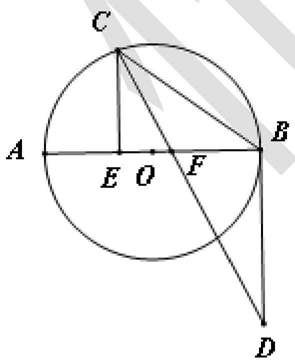


A．$2\sqrt{15}$　　　　B．8　　　　C．$2\sqrt{10}$　　　　D．$2\sqrt{13}$

5．如图，已知⊙O 是△ABD 的外接圆，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，∠ABD=58°，则∠BCD=__________.



6．如图，AB 是⊙O 的直径，点 C 在⊙O 上，CE⊥AB 于 E，CD 平分∠ECB，交过点 B 的射线于 D，交 AB 于 F，且 BC=BD.



（1）求证：BD 是⊙O 的切线；

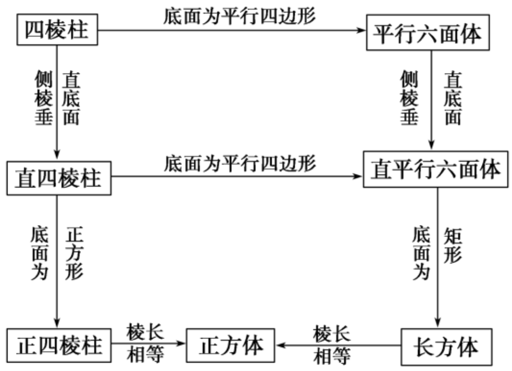
（2）若 AE=9，CE=12，求 BF 的长.

考点二 立体几何

一、要点回顾

（一）空间几何体

1．四棱柱、直四棱柱、正四棱柱、正方体、平行六面体、直平行六面体、长方体之间的关系



2．球

半圆绕着它的直径所在的直线旋转一周所形成的曲面叫做球面，球面成的几何体叫做球体．

同一个平面截一个球，截面是圆面．

3．空间几何体的两组常用公式

(1)柱体、锥体、台体的侧面积公式：

①$S_{柱侧}=ch$(c 为底面周长，h 为高)；

②$S_{锥侧}=\frac{1}{2}ch'$ (c 为底面周长，h' 为斜高)；

③$S_{台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$ (c'，c 分别为上，下底面的周长，h' 为斜高)；

④$S_{球表}=4\pi R^2$(R 为球的半径)．

(2)柱体、锥体和球的体积公式：

①$V_{柱体}=Sh$(S 为底面面积，h 为高)；

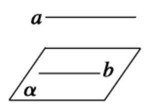
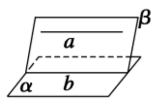
②$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面面积，h 为高)；

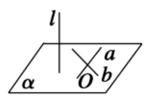
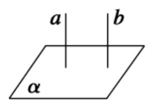
③$V_{台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$(不要求记忆)；

④$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$(R 为球的半径).

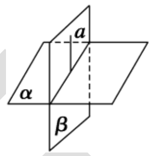
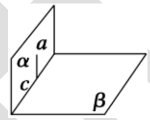
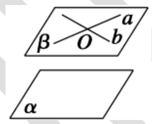
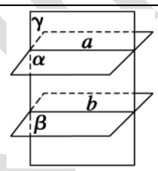
（二）空间中的平行与垂直

1．线面平行与垂直的判定定理、性质定理

线面平行的判定定理	$a\not\subseteq\alpha$，$b\subseteq\alpha$，$a/\!/b$ $\Rightarrow a/\!/\alpha$	
线面平行的性质定理	$a/\!/\alpha$，$a\subset\beta$，$\alpha\cap\beta=b$ $\Rightarrow$ $a/\!/b$	

线面垂直的判定定理	$l\perp a$，$l\perp b,a,b\subset\alpha,a\cap b=O\Rightarrow l\perp\alpha$	
线面垂直的性质定理	$a\perp\alpha$, $b\perp\alpha\Rightarrow a\parallel b$	

2.面面平行与垂直的判定定理、性质定理

面面垂直的判定定理	$a\subset\beta,a\perp\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$	
面面垂直的性质定理	$\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=c,a\subset\alpha,a\perp c\Rightarrow a\perp\beta$	
面面平行的判定定理	$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=O$，$a\parallel\alpha$，$b\parallel\alpha\Rightarrow\alpha\parallel\beta$	
面面平行的性质定理	$\alpha\parallel\beta$，$\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a\parallel b$	

提醒：使用有关平行、垂直的判定定理时，要注意其具备的条件，缺一不可．

3．平行关系及垂直关系的转化

$\boxed{\text{线线平行}}\underset{\text{线面平行的性质}}{\overset{\text{线面平行的判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{线面平行}}\underset{\text{面面平行的性质}}{\overset{\text{面面平行的判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{面面平行}}$面面平行的判定面面平行的性质

$\boxed{\text{线线垂直}}\underset{\text{线面垂直的性质}}{\overset{\text{线面垂直的判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{线面垂直}}\underset{\text{面面垂直的性质}}{\overset{\text{面面垂直的判定}}{\rightleftarrows}}\boxed{\text{面面垂直}}$面面垂直的判定面面垂直的性质

规律总结：1．证明线线平行的常用方法

(1)利用平行公理，即证明两直线同时和第三条直线平行；

(2)利用平行四边形进行转换；

(3)利用三角形中位线定理证明；

(4)利用线面平行、面面平行的性质定理证明．

2．证明线面平行的常用方法

(1)利用线面平行的判定定理，把证明线面平行转化为证线线平行；

(2)利用面面平行的性质定理，把证明线面平行转化为证面面平行．

3．证明面面平行的方法

证明面面平行，依据判定定理，只要找到一个面内两条相交直线与另一个平面平行即可，从而将证面面平行转化为证线面平行，再转化为证线线平行．

4．证明线线垂直的常用方法

(1)利用特殊平面图形的性质，如利用直角三角形、矩形、菱形、等腰三角形等得到线线垂直；

(2)利用勾股定理逆定理；

(3)利用线面垂直的性质，即要证线线垂直，只需证明一线垂直于另一线所在平面即可.

5．证明线面垂直的常用方法

(1)利用线面垂直的判定定理，把线面垂直的判定转化为证明线线垂直；

(2)利用面面垂直的性质定理，把证明线面垂直转化为证面面垂直；

(3)利用常见结论，如两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于这个平面.

6．证明面面垂直的方法

证明面面垂直常用面面垂直的判定定理，即证明一个面过另一个面的一条垂线，将证明面面垂直转化为证明线面垂直，一般先从现有直线中寻找，若图中不存在这样的直线，则借助中点、高线或添加辅助线解决.

（三）立体几何中的向量方法

1．直线与平面、平面与平面的平行与垂直的向量方法

设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(a_1, b_1, c_1)$．平面 α、β 的法向量分别为 $\boldsymbol{\mu}=(a_2, b_2, c_2)$，$\boldsymbol{v}=(a_3, b_3, c_3)$(以下相同).

(1)线面平行

$l /\!/ \alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\mu}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

(2)线面垂直

$l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=k\boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow a_1=ka_2，b_1=kb_2，c_1=kc_2$.

(3)面面平行

$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu} /\!/ \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu}=\lambda\boldsymbol{v} \Leftrightarrow a_2=\lambda a_3，b_2=\lambda b_3，c_2=\lambda c_3$.

(4)面面垂直

$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu}\perp\boldsymbol{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{v}=0 \Leftrightarrow a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0$.

2．直线与直线、直线与平面、平面与平面的夹角计算

设直线 l，m 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(a_1, b_1, c_1)$，$\boldsymbol{b}=(a_2, b_2, c_2)$．平面 α、β 的法向量分别为 $\boldsymbol{\mu}=(a_3, b_3, c_3)$，$\boldsymbol{v}=(a_4, b_4, c_4)$(以下相同).

(1)线线夹角

设 l，m 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}.$$

(2)线面夹角

设直线 l 与平面 α 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，

则 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\mu}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{\mu}|}=|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\mu}\rangle|$.

(3)面面夹角

设半平面 α、β 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，

则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{\mu}||\boldsymbol{v}|}=|\cos\langle\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}\rangle|$.

提醒：求二面角时，两法向量的夹角有可能是二面角的补角，要注意从图中分析.

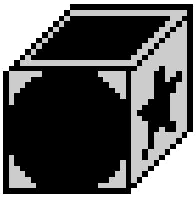
3．求空间距离

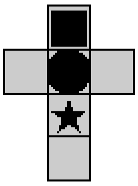
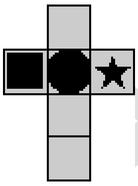
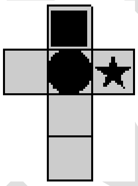
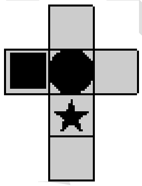
直线到平面的距离，两平行平面的距离均可转化为点到平面的距离，点 P 到平面 α 的距离：$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$(其中 $\boldsymbol{n}$ 为 α 的法向量，M 为 α 内任一点).

二、考题预测

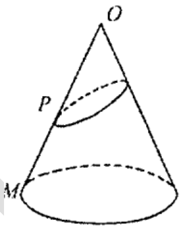
（一）空间几何体

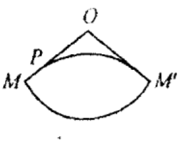
1．将如图所示表面带有图案的正方体沿某些棱展开后，得到的图形是（　　）



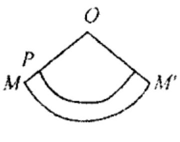
A. 　B. 　C. 　D. 

2．已知 O 为圆锥的顶点，M 为圆锥底面上一点，点 P 在 OM 上．一只锅牛从 P 点出发，绕圆锥侧面爬行，回到 P 点时所爬过的最短路线的痕迹如图所示,若沿 OM 将圆锥侧面剪开并展开，所得侧面展开图是（　　）

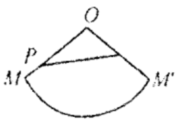




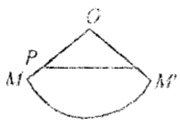
A



B

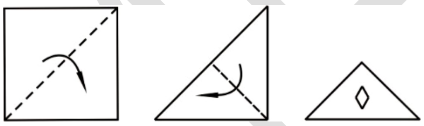


C

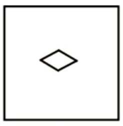


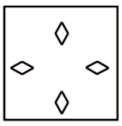
D

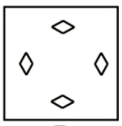
3．将一张正方形纸片如图所示折叠两次，并在上面剪下一个菱形小洞，纸片展开后是（　　）




A.

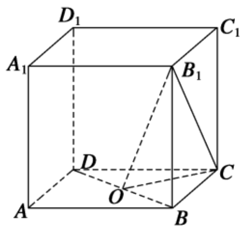

B.


C.

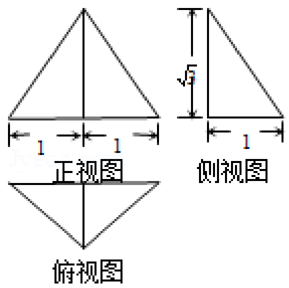

D.

4．已知正四棱锥 O－ABCD 的体积为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$，底面边长为$\sqrt{3}$，则以 O 为球心，OA 为半径的球的表面积为________.

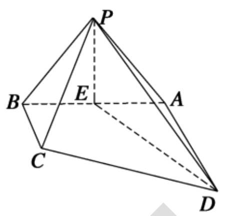
5．如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，O 为底面正方形 $ABCD$ 的中心，则三棱锥 B_1-BCO 的体积 $VB_1-BCO=$________.



6. 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是一个正三角形，则这个几何体的体积是__________，表面积是__________.



7．如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是直角梯形，∠DAB＝90°，AD∥BC，AD⊥侧面 PAB，△PAB 是等边三角形，DA＝AB＝2，BC＝$\frac{1}{2}$AD，E 是线段 AB 的中点.



(1)求证：$PE\perp CD$；

(2)求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

（二）空间中的平行与垂直

1．设 a，b 表示直线，α，β，γ 表示不同的平面，则下列命题中正确的是（　　）

A．若 a⊥α 且 a⊥b，则 b∥α

B．若 γ⊥α 且 γ⊥β，则 α∥β

C．若 a∥α 且 a∥β，则 α∥β

D．若 γ∥α 且 γ∥β，则 α∥β

2．“直线 l 垂直于△ABC 的边 AB，AC”是“直线 l 垂直于△ABC 的边 BC”的（　　）条件．

A．充要　　　　B．充分不必要

C．必要不充分　　　　D．既不充分也不必要

3．设 m、n 是不同的直线，α、β 是不同的平面，有以下四个命题：

①若 $\alpha\perp\beta$，$m\parallel\alpha$，则 $m\perp\beta$

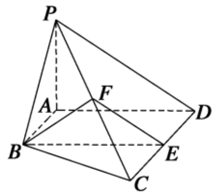
②若 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则 $m\parallel n$

③若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\parallel\alpha$

④若 $n\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $\beta\parallel\alpha$

其中真命题的序号为________．

4．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AB\perp AD$，$CD=2AB$，平面 $PAD\perp$底面 $ABCD$，$PA\perp AD$，E 和 F 分别是 CD 和 PC 的中点，求证：

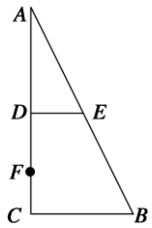


(1)$PA\perp$底面 $ABCD$；

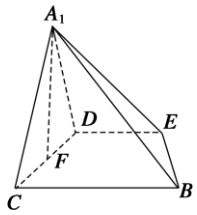
(2)$BE\parallel$平面 PAD；

(3)平面 $BEF\perp$平面 PCD．

5．如图(1)，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，D，E 分别为 AC，AB 的中点，点 F 为线段 CD 上的一点，将△ADE 沿 DE 折起到△A_1DE 的位置，使 $A_1F\perp CD$，如图(2)．



(1)



(2)

(1)求证：$DE\parallel$平面 A_1CB；

(2)求证：$A_1F\perp BE$；

(3)线段 A_1B 上是否存在点 Q，使 $A_1C\perp$平面 DEQ？请说明理由．

（三）立体几何中的向量方法

1．已知平面 ABC，点 M 是空间任意一点，点 M 满足条件 $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$，则直线 AM(　　)．

A．与平面 ABC 平行

B．是平面 ABC 的斜线

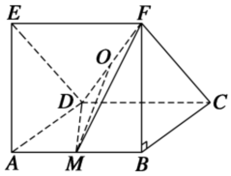
C．是平面 ABC 的垂线

D．在平面 ABC 内

2．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 BC 的中点，P，Q 是正方体内部或面上的两个动点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PQ}$的最大值是________．

3．正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E、F 分别为 BB_1、CD 的中点，则点 F 到平面 A_1D_1E 的距离为________________.

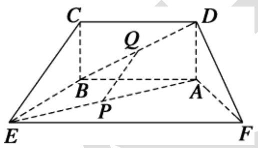
4．如图，在直三棱柱 $ADE—BCF$ 中，面 $ABFE$ 和面 $ABCD$ 都是正方形且互相垂直，M 为 AB 的中点，O 为 DF 的中点．运用向量方法证明：



(1)OM∥平面 BCF；

(2)平面 MDF⊥平面 $EFCD$.

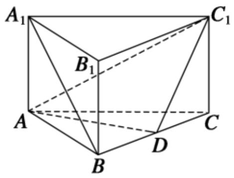
5．如图，五面体中，四边形 $ABCD$ 是矩形，AB∥EF，AD⊥平面 $ABEF$，且 $AD=1$，$AB=\frac{1}{2}EF=2\sqrt{2}$，$AF=BE=2$，$P$、$Q$ 分别为 AE、BD 的中点.



(1)求证：PQ∥平面 BCE；

(2)求二面角 $A-DF-E$ 的余弦值.

6．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=2AA_1$，$\angle ABC=90°$，D 是 BC 的中点．

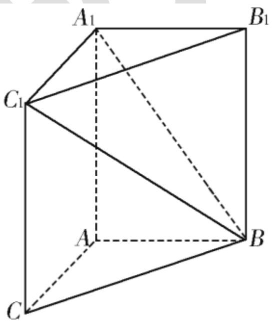


(1)求证：$A_1B\parallel$ 平面 ADC_1；

(2)求二面角 C_1-AD-C 的余弦值；

(3)试问线段 A_1B_1 上是否存在点 E，使 AE 与 DC_1 成 60°角？若存在，确定 E 点位置；若不存在，说明理由．

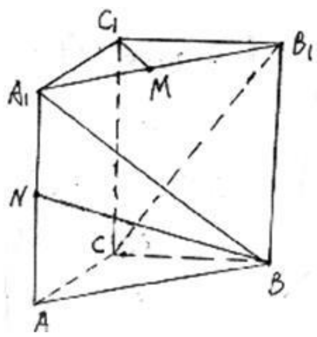
7．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，AA_1C_1C 是边长为 4 的正方形，平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1C_1C，$AB=3$，$BC=5$．



（1）求直线 B_1C_1 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值；

（2）在线段 BC_1 上确定一点 D，使得 $AD\perp A_1B$，并求 $\dfrac{BD}{BC_1}$ 的值．

8．如图，直三棱柱 ABC—$A_1B_1C_1$，底面△ABC 中，CA=CB=1，∠BCA=90°，棱 AA_1=2，M、N 分别是 A_1B_1，A_1A 的中点；



（1）求证：$A_1B \perp C_1M$.

（2）求 CB_1 与平面 A_1ABB_1 所成的角的余弦值.

考点三 解析几何

一、要点回顾

（一）直线与圆

1.直线方程的五种形式

(1)点斜式：$y-y_1=k(x-x_1)$(直线过点 $P_1(x_1，y_1)$，且斜率为 k，不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线).

(2)斜截式：$y=kx+b$(b 为直线 l 在 y 轴上的截距，且斜率为 k，不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线).

(3)两点式：$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$(直线过点 $P_1(x_1，y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$，不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线).

(4)截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$($a$、$b$ 分别为直线的横、纵截距，且 $a\neq0$，$b\neq0$，不包括坐标轴、平行于坐标轴和过原点的直线).

(5)一般式：$Ax+By+C=0$(其中 A，B 不同时为 0).

2．直线的两种位置关系

当不重合的两条直线 l_1 和 l_2 的斜率存在时：

(1)两直线平行 $l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$.

(2)两直线垂直 $l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

提醒：当一条直线的斜率为 0，另一条直线的斜率不存在时，两直线也垂直，此种情形易忽略.

3．三种距离公式

(1)$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$两点间的距离：$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

(2)点到直线的距离：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$(其中点 $P(x_0，y_0)$，直线方程：$Ax+By+C=0$).

(3)两平行线间的距离：$d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$(其中两平行线方程分别为 l_1：$Ax+By+C_1=0$，l_2：$Ax+By+C_2=0$).

提醒：应用两平行线间距离公式时，注意两平行线方程中 x，y 的系数应对应相等.

4．圆的方程的两种形式

(1)圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

(2)圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$.

5．直线与圆、圆与圆的位置关系

(1)直线与圆的位置关系：相交、相切、相离，代数判断法与几何判断法.

(2)圆与圆的位置关系：相交、相切、相离，代数判断法与几何判断法.

规律总结：

1．由于直线方程有多种形式，各种形式适用的条件、范围不同，在具体求直线方程时，由所给的条件和采用的直线方程形式所限，可能会产生遗漏的情况，尤其在选择点斜式、斜截式时要注意斜率不存在的情况.

2．确定圆的方程时，常用到圆的几个性质：

(1)直线与圆相交时应用垂径定理构成直角三角形(半弦长，弦心距，圆半径)；

(2)圆心在过切点且与切线垂直的直线上；

(3)圆心在任一弦的中垂线上；

(4)两圆内切或外切时，切点与两圆圆心三点共线；

(5)圆的对称性：圆关于圆心成中心对称，关于任意一条过圆心的直线成轴对称．

3．直线与圆中常见的最值问题

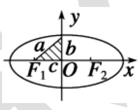
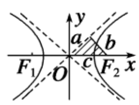
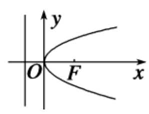
圆上的点与圆外点的距离的最值问题，可以转化为圆心到点的距离问题；圆上的点与直线上点的距离的最值问题，可以转化为圆心到直线的距离问题；圆上的点与另一圆上点的距离的最值问题，可以转化为圆心到圆心的距离问题．

4．过两圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$，C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程为 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$．

5．两圆相交，将两圆方程联立消去二次项，得到一个二元一次方程，即为两圆公共弦所在的直线方程．

（二）椭圆、双曲线、抛物线

圆锥曲线的定义、标准方程与几何性质

<table>
<tr><td colspan="2">名称</td><td>椭圆</td><td>双曲线</td><td>抛物线</td></tr>
<tr><td colspan="2">定义</td><td>$PF_1+PF_2=2a$ $(2a>F_1F_2)$</td><td>$|PF_1-PF_2|=2a(2a<F_1F_2)$</td><td>$PF=PM$，点 F 不在直线 l 上，$PM\perp l$ 于 M</td></tr>
<tr><td colspan="2">标准方程</td><td>$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$</td><td>$y^2=2px(p>0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">几何性质</td><td>范围</td><td>$|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$</td><td>$|x|\geqslant a$</td><td>$x\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>顶点</td><td>$(\pm a,0)(0，\pm b)$</td><td>$(\pm a,0)$</td><td>$(0,0)$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 x 轴，y 轴和原点对称</td><td>关于 x 轴对称</td></tr>
<tr><td>焦点</td><td colspan="2">$(\pm c,0)$</td><td>$(\frac{p}{2}，0)$</td></tr>
<tr><td>轴</td><td>长轴长 $2a$，短轴长 $2b$</td><td>实轴长 $2a$，虚轴长 $2b$</td><td></td></tr>
<tr><td>离心率</td><td>$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}(0<e<1)$</td><td>$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}(e>1)$</td><td>$e=1$</td></tr>
</table>

	准线			$x=-\frac{p}{2}$
	渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	

规律总结

1．对涉及圆锥曲线上点到焦点距离或焦点弦的问题，恰当选用定义解题，会效果明显，定义中的定值是标准方程的基础.

2．椭圆、双曲线的方程形式上可统一为$Ax^2+By^2=1$，其中A、B是不等的常数，$A>B>0$时，表示焦点在y轴上的椭圆；$B>A>0$时，表示焦点在x轴上的椭圆；$AB<0$时，表示双曲线.

3．求双曲线、椭圆的离心率的方法：(1)直接求出a，c，计算$e=\frac{c}{a}$；(2)根据已知条件确定a，b，c的等量关系，然后把b用a，c代换，求$\frac{c}{a}$.

4．通径：过双曲线、椭圆、抛物线的焦点垂直于对称轴的弦称为通径，双曲线、椭圆的通径长为$\frac{2b^2}{a}$，过椭圆焦点的弦中通径最短；抛物线通径长是$2p$，过抛物线焦点的弦中通径最短.

椭圆上点到焦点的最长距离为$a+c$，最短距离为$a-c$.

5．抛物线焦点弦性质：

已知AB是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点弦，F为抛物线的焦点，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$.

(1)$y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；

(2)$AB=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$($\alpha$为弦$AB$的倾斜角)；

(3)$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}$；

(4)$\frac{1}{FA}+\frac{1}{FB}$为定值$\frac{2}{p}$；

(5)以AB为直径的圆与抛物线的准线相切.

二、考题预测

（一）直线与圆

1．设 P,Q 分别为直线 $x-y=0$ 和圆 $x^2+(y-6)^2=2$ 上的点，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．4

2．已知直线 $l_1:3mx+(m+2)y+1=0$，直线 $l_2:(m-2)x+(m+2)y+2=0$，且 $l_1//l_2$，则 m 的值为（　　）

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{2}$ 或-2　　D．-1 或-2

3．若直线 $ax+2by-2=0(a\ge b>0)$，始终平分圆 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ 的周长，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为（　　）

A．1　　B．$3+2\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．6

4．直线 l_1：$kx+(1-k)y-3=0$ 和 l_2：$(k-1)x+(2k+3)y-2=0$ 互相垂直，则 $k=$________.

5．若直线 $ax+2by-2=0(a,b>0)$ 始终平分圆 $x^2+y^2-4x-2y-8=0$ 的周长，则 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$ 的最小值为__________.

6. 若圆 O: $x^2+y^2=4$ 与圆 C: $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 关于直线 l 对称，则直线 l 的方程是________.

7．若直线 y＝kx＋2k 与圆 x2＋y2＋mx＋4＝0 至少有一个交点，则 m 的取值范围是________.

8．设 P 为直线 3x＋4y＋3＝0 上的动点，过点 P 作圆 C：x2＋y2－2x－2y＋1＝0 的两条切线，切点分别为 A，B，则四边形 PACB 的面积的最小值为________.

（二）椭圆、双曲线、抛物线

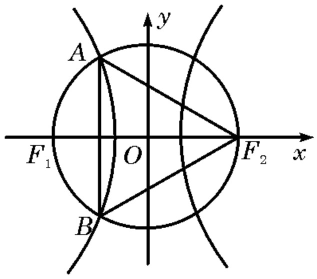
1．双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的顶点到其渐近线的距离等于（　　）

A．$\frac{2}{5}$　　B．$\frac{4}{5}$　　C．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

2．与双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$ 有共同的渐近线，且经过点 $A(\sqrt{3},2\sqrt{5})$ 的双曲线的方程为（　　）

A．$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{12}=1$　　B．$2x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　C．$\frac{y^2}{18}-\frac{x^2}{27}=1$　　D．$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{4}=1$

3. 如图，F_1、F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，以坐标原点 O 为圆心，$|OF_1|$ 为半径的圆与该双曲线左支交于 A、B 两点，若△F_2AB 是等边三角形，则双曲线的离心率为（　　）



A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}-1$　　D. $1+\sqrt{3}$

4. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a>0，b>0）的一条渐近线方程是 y=$\sqrt{3}$x，它的一个焦点在抛物线 y2=24x 的准线上，则双曲线的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{108}=1$　　B. $\frac{x^2}{108}-\frac{y^2}{36}=1$　　C. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$　　D. $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$

5. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的准线与双曲线 $\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 的左支交于 A,B 两点，点 F 为抛物线的焦点，若 $\angle AFB$ 为直角，则双曲线的离心率是（　　）

A. $\sqrt{6}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　　C. $\frac{\sqrt{30}}{5}$　　D. $2\sqrt{6}$

6. 过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{15}=1$ 的右支上一点 P，分别向圆 $C_1:(x+4)^2+y^2=4$ 和圆 $C_2:(x-4)^2+y^2=1$ 作切线，切点分别为 M，N，则 $|PM|^2-|PN|^2$ 的最小值为（　　）

A. 10　　B. 13　　C. 16　　D. 19

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$以及双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 的渐近线将第一象限三等分，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为________.

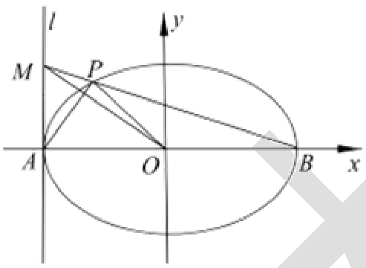
8 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$的一条渐近线方程是 $y=\sqrt{3}x$，它的一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准线上，则双曲线的方程为________.

9. 设 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点，过 F_1 且斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，且 AF_2，AB，BF_2 成等差数列.

(1)求 E 的离心率；

(2)设点 $P(0，-1)$满足 $PA=PB$，求 E 的方程.

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$，过椭圆的左顶点 A 作直线 $l\perp x$ 轴，点 M 为直线 l 上的动点，点 B 为椭圆右顶点，直线 BM 交椭圆 C 于 P.



（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求证：$AP\perp OM$；

（3）试问 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$ 是否为定值？若是定值，请求出该定值；若不是定值，请说明理由.

11. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，且离心率为 $\frac{1}{2}$，点 P 为椭圆上一动点，ΔF_1PF_2 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

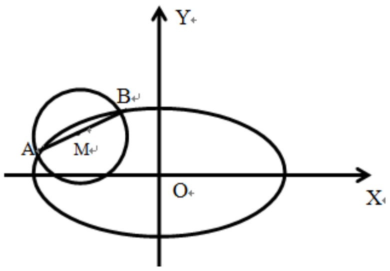
（1）求椭圆的方程；

（2）设椭圆的左顶点为 A_1，过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆相交于 A，B 两点，连结 A_1A，A_1B 并延长交直线 $x=4$ 分别于 P，Q 两点，问 $\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{QF_2}$ 是否为定值？若是，求出此定值；若不是,请说明理由.

12．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的半焦距为 c，原点 O 到经过两点（c，0），（0，b）的直线的距离为$\frac{1}{2}$c，

（1）求椭圆 E 的离心率；

（2）如图，AB 是圆 M：（x+2）^{2}+（y-1）^{2}=$\frac{5}{2}$的一条直径，若椭圆 E 经过 A，B 两点，求椭圆 E 的方程



第三部分 统计与概率

一、要点回顾

（一）排列、组合

1．分类计数原理和分步计数原理

如果每种方法都能将规定的事件完成，则要用分类计数原理将方法种数相加；如果需要通过若干步才能将规定的事件完成，则要用分步计数原理将各步的方法种数相乘．

2．排列与组合

(1)排列：从 n 个不同元素中取出 $m(m\leq n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列．从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数公式是 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 或写成 $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$．

(2)组合：从 n 个不同元素中取出 $m(m\leq n)$ 个元素组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合．从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数公式是

$C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 或写成 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$．

(3)组合数的性质

①$C_n^m=C_n^{n-m}$；

②$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$．

规律总结

排列、组合应用题的解题策略

(1)在解决具体问题时，首先必须弄清楚是“分类”还是“分步”，接着还要搞清楚“分类”或者“分步”的具体标准是什么．

(2)区分某一问题是排列问题还是组合问题，关键看选出的元素与顺序是否有关．若交换某两个元素的位置对结果产生影响，则是排列问题；若交换任意两个元素的位置对结果没有影响，则是组合问题．也就是说排列问题与选取元素的顺序有关，组合问题与选取元素的顺序无关．

(3)排列、组合综合应用问题的常见解法：①特殊元素(特殊位置)优先安排法；②合理分类与准确分步；③排列、组合混合问题先选后排法；④相邻问题捆绑法；⑤不相邻问题插空法；⑥定序问题倍缩法；⑦多排问题一排法；⑧“小集团”问题先整体后局部法；⑨构造模型法；⑩正难则反、等价转化法．

（二）统计

1．随机抽样

(1)简单随机抽样特点是从总体中逐个抽取．适用范围：总体中的个体较少．

(2)系统抽样特点是将总体均分成几部分，按事先确定的规则在各部分中抽取．适用范围：总体中的个体数较多．

(3)分层抽样特点是将总体分成几层，分层进行抽取．适用范围：总体由差异明显的几部分组成．

2．常用的统计图表

(1)频率分布直方图

①小长方形的面积＝组距×$\frac{频率}{组距}$＝频率；

②各小长方形的面积之和等于 1；

③小长方形的高＝$\frac{频率}{组距}$，所有小长方形的高的和为$\frac{1}{组距}$.

(2)茎叶图

在样本数据较少时，用茎叶图表示数据的效果较好.

3．用样本的数字特征估计总体的数字特征

(1)众数、中位数、平均数

数字特征	样本数据	频率分布直方图
众数	出现次数最多的数据	取最高的小长方形底边中点的横坐标
中位数	将数据按大小依次排列，处在最中间位置的一个数据(或最中间两个数据的平均数)	把频率分布直方图划分左右两个面积相等的分界线与 x 轴交点的横坐标
平均数	样本数据的算术平均数	每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点的横坐标之和

(2)方差：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]$.

标准差：

$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$.

（三）概率

1．随机事件的概率

(1)随机事件的概率范围：$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；必然事件的概率为 1；不可能事件的概率为 0.

(2)古典概型的概率

$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A中所含的基本事件数}{基本事件总数}$.

(3)几何概型的概率

$P(A)=\frac{构成事件A的区域长度(面积或体积)}{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}$.

2．条件概率

在 B 发生的条件下 A 发生的概率：

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$.

3．相互独立事件同时发生的概率

$P(AB)=P(A)P(B)$.

4．独立重复试验

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么它在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率为

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2$，…，$n$.

5．超几何分布

在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则 $P(X=r)=\dfrac{C_M^r C_{N-M}^{n-r}}{C_N^n}$，$r=0,1,2,\cdots,l$，其中 $l=\min(n,M)$，且 $n\leqslant N$，$M\leqslant N$，n，M，$N\in\mathbf{N}^*$.此时称随机变量 X 服从超几何分布．超几何分布的模型是不放回抽样，超几何分布中的参数是 M，N，n.

6．离散型随机变量的概率分布

(1)设离散型随机变量 X 可能取的值为 x_1，x_2，…，x_i，…，x_n，X 取每一个值 x_i 的概率为 $P(X=x_i)=p_i$，则称下表：

X	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_i	…	p_n

为离散型随机变量 X 的概率分布．

(2)离散型随机变量 X 的概率分布具有两个性质：①$p_i\geqslant 0$，②$p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots+p_n=1(i=1,2,3,\cdots,n)$.

(3)$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$ 为 X 的均值或数学期望(简称期望).

$V(X)=(x_1-E(X))^2\cdot p_1+(x_2-E(X))^2\cdot p_2+\cdots+(x_i-E(X))^2\cdot p_i+\cdots+(x_n-E(X))^2\cdot p_n$ 叫做随机变量 ξ 的方差.

(4)性质

①$E(aX+b)=aE(X)+b$，$V(aX+b)=a^2V(X)$；

②$X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$，$V(X)=np(1-p)$；

③X 服从两点分布，则 $E(X)=p$，$V(X)=p(1-p)$.

二、考题预测

（一）排列、组合

1．从 8 名女生和 4 名男生中，抽取 3 名学生参加某档电视节目，如果按性别比例分层抽样，则不同的抽取方法种数为________.

2．计划展出 10 幅不同的画，其中 1 幅水彩画、4 幅油画、5 幅国画，排成一列，要求同一品种的画必须连在一起，并且水彩画不放在两端，那么不同的排列方式的种数有________.

3．把 5 件不同产品摆成一排，若产品 A 与产品 B 相邻，且产品 A 与产品 C 不相邻，则不同的摆法有________种.

4．小明试图将一箱中的 24 瓶啤酒全部取出，每次小明在取出啤酒时只能取出三瓶或四瓶啤酒，那么小明取出啤酒的方式共有（　　）种.

A．18　　B．27　　C．37　　D．212

5．将 2 名教师，4 名学生分成 2 个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由 1 名教师和 2 名学生组成，不同的安排方案共有（　　）

A．12 种　　B．10 种　　C．9 种　　D．8 种

（二）统计

1．要反映我市某一周每天的最高气温的变化趋势，宜采用（　　）

A．条形统计图　　B．扇形统计图

C．折线统计图　　D．频数分布统计图

2．下列调查方式中，合适的是（　　）．

A．为了解灯泡的寿命，采用普查的方式

B．为了解我国中学生的睡眠状况，采用普查的方式

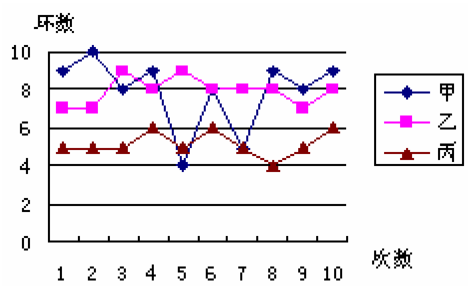
C．为了解某班学生保护水资源的意识，采用普查的方式

D．对“神舟七号”零部件的检查，采用抽样调查的方式

3．一名射击爱好者 5 次射击的中靶环数如下：6，7，9，8，9，这 5 个数据的中位数是__________．

4．若已知一组数据 x_1，x_2…，x_n 的平均数为 x，方差为 S^2，那么另一组数据 $3x_1-2$，$3x_2-2$，…，$3x_n-2$ 的平均数为__________，方差为__________．

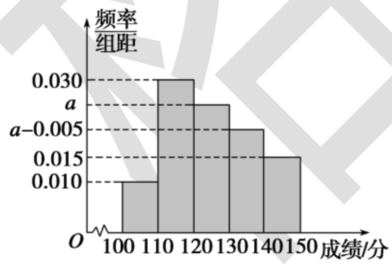
5．甲、乙、丙三人的射击成绩如下图：三人中，________的射击成绩差，________更稳定．



6．对一个容量为 N 的总体抽取容量为 n 的样本，当选取简单随机抽样、系统抽样和分层抽样三种不同方法抽取样本时，总体中每个个体被抽中的概率分别为 p_1，p_2，p_3，则 p_1，p_2，p_3 的大小关系是________．

7．某中学高中一年级有 400 人，高中二年级有 320 人，高中三年级有 280 人，现从中抽取一个容量为 200 人的样本，则高中二年级被抽取的人数为________．

8．从某中学高一年级中随机抽取 100 名同学，将他们的成绩(单位：分)数据绘制成频率分布直方图(如图)．则这 100 名学生成绩的平均数、中位数分别为________．



9．某校甲、乙两个班级各有 5 名编号为 1，2，3，4，5 的学生进行投篮练习，每人投 10 次，投中的次数如下表：

学生	1 号	2 号	3 号	4 号	5 号
甲班	6	7	7	8	7
乙班	6	7	6	7	9

以上两组数据的方差中较小的一个为 s^2，则 s^2＝____________．

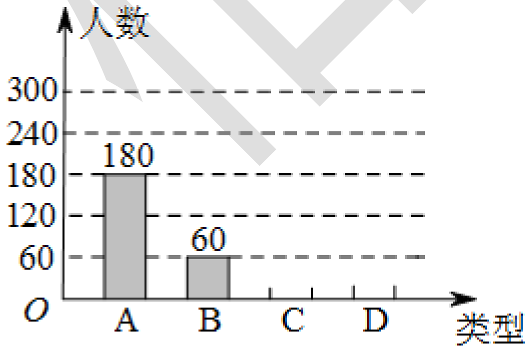
10．为了了解 2014 年某校高三学生的视力情况，随机抽查了一部分学生的视力，将调查结果分组，分组区间为(3．9,4．2]，(4．2,4．5]，…，(5．1,5．4]．经过数据处理，得到如下频率分布表：

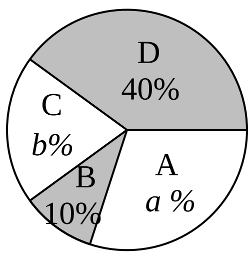
分组	频数	频率
(3.9,4.2]	3	0．06
(4.2,4.5]	6	0．12
(4.5,4.8]	25	x
(4.8,5.1]	y	z
(5.1,5.4]	2	0.04
合计	n	1.0.0

(1)求频率分布表中未知量 n，x，y，z 的值；

(2)从样本中视力在(3．9,4．2]和(5．1,5．4]的学生中随机抽取 2 人，求 2 人的视力差的绝对值低于 0．5 的概率．

11．“端午节”是我国的传统佳节，民间历来有吃“粽子”的习俗．我市某食品厂为了解市民对去年销量较好的肉馅粽、豆沙馅粽、红枣馅粽、蛋黄馅粽（以下分别用 A，B，C，D 表示）这四种不同口味粽子的喜爱情况，在节前对某居民区市民进行了抽样调查，并将调查情况绘制成如下两幅统计图





请根据以上信息回答：

（1）本次参加抽样调查的居民有________人；

（2）扇形统计图中：a=________，b=_________，并把条形统计图补充完整；

（3）若有外型完全相同的 A，B，C，D 粽各一个，煮熟后，小王吃了两个，用列表或画树状图的方法，求他第二个吃到的恰好是 C 粽的概率.

（三）概率

1. 我市某中学举办了一次以“我的中国梦”为主题的演讲比赛，最后确定 7 名同学参加决赛，他们的决赛成绩各不相同，其中李华已经知道自己的成绩，但能否进前四名，他还必须清楚这七名同学成绩的（　　）

A．众数　　B．平均数　　C．中位数　　D．方差

2. 已知一个布袋里装有 2 个红球，3 个白球和 a 个黄球，这些球除颜色外其余都相同．若从该布袋里任意摸出 1 个球，是红球的概率为 $\frac{1}{3}$，则 a 等于（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

3. 为了估计湖中有多少条鱼，先从湖中捕捉 50 条鱼做记号，然后放回湖里，经过一段时间，等带记号的鱼完全混于鱼群之中，再第二次捕捞鱼共 200 条，有 10 条做了记号，则估计湖里有（　　）条鱼.

A．400　　B．500　　C．800　　D．1000

4. 下列事件是必然事件的是（　　）

A．抛掷一次硬币，正面朝上

B．任意购买一张电影票，座位号恰好是“7 排 8 号”

C．某射击运动员射击一次，命中靶心

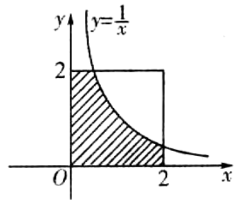
D．13 名同学中，至少有两名同学出生的月份相同

5．已知甲、乙两组数据如茎叶图所示，若它们的中位数相同，平均数也相同，则图中的 m,n 的比值 $\frac{m}{n}=$（　　）

甲		乙
7	2	n
9 m	3	2 4 8

A．1　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{2}{9}$　　D．$\frac{3}{8}$

6．向图中边长为 2 的正方形中，随机撒一粒黄豆，则黄豆落在图中阴影部分的概率为（　　）



A．$\frac{1+2\ln 2}{4}$　　B．$\frac{\ln 2}{2}$　　C．$\frac{2+\ln 2}{4}$　　D．$\frac{2-\ln 2}{4}$

7．如图所示的茎叶图表示甲、乙两人在 5 次综合测评中的成绩，其中一个数字被污损，则甲的平均成绩不低于乙的平均成绩的概率为________．

甲		乙
9 8	8	3 3 7
2 1 0	9	■ 9

8．已知盒中装有 3 只螺口灯泡与 7 只卡口灯泡，这些灯泡的外形与功率都相同且灯口向下放着，现需要一只卡口灯泡，电工师傅每次从中任取一只并不放回，则在他第 1 次抽到的是螺口灯泡的条件下，第 2 次抽到的是卡口灯泡的概率是________．

9．甲、乙、丙三个同学一起参加某高校组织的自主招生考试，考试分笔试和面试两部分，笔试和面试均合格者将成为该高校的预录取生(可在高考中加分录取)，两次考试过程相互独立．根据甲、乙、丙三个同学的平时成绩分析，甲、乙、丙三个同学能通过笔试的概率分别是 0.6、0.5、0.4，能通过面试的概率分别是 0.6、0.6、0.75．

（1）求甲、乙、丙三个同学中恰有一人通过笔试的概率；

（2）求经过两次考试后，至少有一人被该高校预录取的概率．

10．某卫视的大型娱乐节目现场，所有参加的节目都由甲、乙、丙三名专业老师投票决定是否通过进入下一轮，甲、乙、丙三名老师都有“通过”“待定”“淘汰”三类票各一张，每个节目投票时，甲、乙、丙三名老师必须且只能投一张票，每人投三类票中的任意一类票的概率均为$\frac{1}{3}$，且三人投票相互没有影响，若投票结果中至少有两张“通过”票，则该节目获得“通过”，否则该节目不能获得“通过”.

（1）求某节目的投票结果获“通过”的概率；

（2）记某节目投票结果中所含“通过”和“待定”票票数之和为X，求X的分布列和数学期望.

第四部分 高等数学

考点一 一元函数微积分

一、考点回顾

（一）极限与连续

1．极限的概念

（1）数列的极限

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，称数列$\{y_n\}$以常数 A 为极限;或称数列$\{y_n\}$收敛于 A.

定理:若$\{y_n\}$的极限存在$\Rightarrow\{y_n\}$必定有界.

（2）函数的极限

①当$x\to\infty$时，$f(x)$的极限：

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\end{array}\right\}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$$

②当$x\to x_0$时，$f(x)$的极限：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$

右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

③函数极限存的充要条件：

定理：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

（3）无穷大量和无穷小量

无穷大量：$\lim|f(x)|=+\infty$，称在该变化过程中$f(x)$为无穷大量.

X 再某个变化过程是指：

$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$, $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0$

无穷小量：$\lim f(x)=0$，称在该变化过程中$f(x)$为无穷小量.

无穷大量与无穷小量的关系：

定理：$\lim f(x)=0\Leftrightarrow \lim\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=+\infty,(f(x)\neq 0)$

无穷小量的比较：$\lim\alpha=0,\lim\beta=0$

①若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称β是比α较高阶的无穷小量；

②若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c$（c为常数），则称β与α同阶的无穷小量；

③若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称β与α是等价的无穷小量，记作：β～α；

④若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称β是比α较低阶的无穷小量.

定理：若：$\alpha_1\sim\beta_1$，$\alpha_2\sim\beta_2$;则：$\lim\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\lim\frac{\beta_1}{\beta_2}$

2．两面夹定理

数列极限存在的判定准则：

设$y_n\le x_n\le z_n$（n=1，2，3，…），且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

函数极限存在的判定准则：

设对于点x0的某个邻域内的一切点（点x0除外），有$g(x)\le f(x)\le h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

3．极限的运算规则

若：$\lim u(x)=A,\quad \lim v(x)=B$

则：①$\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)=A\pm B$

②$\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)=A\cdot B$

③$\lim\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim u(x)}{\lim v(x)}=\dfrac{A}{B}\ (\lim v(x)\ne0)$

推论：

①$\lim[u_1(x)\pm u_2(x)\pm\cdots\pm u_n(x)]$

$=\lim u_1(x)\pm\lim u_2(x)\pm\cdots\pm\lim u_n(x)$

②$\lim[c\cdot u(x)]=c\cdot\lim u(x)$

③$\lim[u(x)]^n=[\lim u(x)]^n$

4．两个重要极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$或$\lim\limits_{\phi(x)\to0}\dfrac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1$

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

5．间断点

（1）第一类间断点

①可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而 $f(x)$ 在 x_0 无定义或有定义但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq A$，则称 x_0 为 f 的可去间断点．

②跳跃间断点：若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称 x_0 为 f 的跳跃间断点．

第一类间断点的左、右极限都存在．

(2)第二类间断点

其他形式的间断点，使得左、右极限至少有一侧不存在的间断点，都是第二类间断点．

（二）导数与微分

1．导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应地函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限值为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（也称微商）．

记作 $f'(x_0)$，或 $y'\big|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 等．

并称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导．如果上面的极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导．

导数定义的另一等价形式，令 $x=x_0+\Delta x$，$\Delta x=x-x_0$，

则 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

我们也引进**单侧导数**概念．

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

则有 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在点 x_0 处左、右导数皆存在且相等．

在讨论分段函数在分界点 x_0 处的可导性时，要用上述结论．

2．导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 $x=x_0$ 处的导数值就是曲线 $y=f(x)$在点$(x_0，f(x_0))$处的切线的斜率，其切线方程是 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

3．导函数

（1）函数在区间上的可导性

若函数 f(x)在区间（a，b）内每一点都可导，则称 f(x)在（a，b）内可导．若 f(x)在开区间（a，b）内可导，且 f(x)既在点 x=a 处可导，又在点 x=b 处可导（即 $f_+'(a)$ 与 $f_-'(b)$ 都存在），则称 f(x)在闭区间[a，b]上可导.

（2）导函数

若 f(x)在区间 I 可导，则 $\forall x\in I$ 都对应着 f(x)的一个确定的导数值 $f'(x)$，这就构成一个新的函数，叫做 y=f(x)的导函数，简称导数，双叫一阶导数．记为 y' 或 $f'(x),\dfrac{dy}{dx},\dfrac{df(x)}{dx}$.

4．导数与函数单调性的关系

(1)$f'(x)>0$ 是$f(x)$为增函数的充分不必要条件，如函数$f(x)=x^3$在$(-\infty，+\infty)$上单调递增，但$f'(x)\geqslant 0$.

(2)$f'(x)\geqslant 0$ 是 $f(x)$为增函数的必要不充分条件，当函数在某个区间内恒有 $f'(x)=0$ 时，则 $f(x)$为常函数，函数不具有单调性.

5．函数的极值与最值

(1)函数的极值是局部范围内讨论的问题，函数的最值是对整个定义域而言的，是在整个范围内讨论的问题.

(2)函数在其定义区间的最大值、最小值最多有一个，而函数的极值可能不止一个，也可能没有.

(3)闭区间上连续的函数一定有最值，开区间内的函数不一定有最值，若有唯一的极值，则此极值一定是函数的最值.

6．微分的定义

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 处有增量 Δx 时，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$有下面的表达式

$$\Delta y=A(x_0)\Delta x+0(\Delta x)\ (\Delta x\to 0)$$

其中 $A(x_0)$为与 Δx 无关，$0(\Delta x)$是 $\Delta x\to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小.

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，并把 Δy 中的主要线性部分 $A(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分，记以

$dy\Big|_{x=x_0}$ 或 $df(x)\Big|_{x=x_0}$

我们定义自变量的微分 dx 就是 Δx .

7．可导与可微的关系

$f(x)$在 x_0 处可微$\Leftrightarrow f(x)$在 x_0 处可导.

且 $dy\Big|_{x=x_0}=A(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$

一般地，$y=f(x)$则 $dy=f'(x)dx$

所以导数 $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ 也称为微商，就是微分之商的含义.

8．可导与连续

f(x)在点 x_0 处可导，则 f(x)在点 x_0 处连续；反之，f(x)在点 x_0 处连续，f(x)在点 x_0 处不一定可导，如 f(x)=|x|在 x=0 处连续但不可导.

9．可导与微分表

$(c)'=0$ $d(c)=0$

$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 实常数）$\mathrm{d}(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$（$\alpha$ 实常数）

$(\sin x)'=\cos x$； $d\sin x=\cos xdx$

$(\cos x)'=-\sin x$； $d\cos x=-\sin xdx$

$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$； $d\log_a x=\dfrac{dx}{x\ln a}(a>0,a\neq1)$

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$； $d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$

$(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,a\neq1)$； $da^x=a^x\ln adx\,(a>0,a\neq1)$

$(e^x)'=e^x$； $de^x=e^xdx$

用微分表示 $dy=f'(u)du$ 其中 u 可以是自变量，也可以是另一变量的可微函数，这就是**一阶微分形式不变性**.

（1）反函数求导法则

设 y=f(x)在区间 I_x 内可导且 $f'(x)\neq0$，y=f(x)的值域为区间 I_y，则 y=f(x)的反函数 $x=\varphi(y)$ 在 I_y 可导，且 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

（2）隐函数求导法

设 $y=y(x)$ 是由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，求 y' 的方法如下：

把 $F(x,y)=0$ 两边的各项对 x 求导，把 y 看作中间变量，用复合函数求导公式计算，然后再解出 y' 的表达式（允许出现 y 变量）

例如，$x^2+y^2=1$，$2x+2y\cdot y'=0$，$y'=-\dfrac{x}{y}\ (y\neq 0)$

(3)对数函数求导法

先对所给函数式的两边取对数，然后再用隐函数求导方法得出导数y'.

对数求导法主要用于：

①幂指函数求导数

②多个函数连乘除或开方求导数

关于幂指函数$y=[f(x)]^{g(x)}$常用的一种方法$y=e^{g(x)\ln f(x)}$这样就可以直接用复合函数运算法则进行.

关于分段函数求分段点处的导数，常常要先讨论它的左、右两侧的导数.

(4)由参数方程确定函数的求导方法

设$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\varphi(t),\psi(t)$可导，且$\varphi'(t)\neq 0$，则$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

10．中值定理

（1）罗尔中值定理：若函数 f(x)在[a，b]上连续，在(a，b)上可导，且 f(a)=f(b)，则存在ξ∈(a，b)，使$f'(\xi)=0$.

（2）Lagrange 中值定理：若 f(x)在[a，b]上连续，在(a，b)上可导，则存在ξ∈(a，b)，使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

（3）若函数 f(x)．g(x)在[a，b]上连续，在(a，b)上可导，且 g(x)≠0，则存在ξ∈(a，b)，使$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

（三）积分

1．不定积分的概念：

设$f(x)$，$x\in I$，若存在函数$F(x)$，使得对任意$x\in I$均有$F'(x)=f(x)$

或$dF(x)=f(x)dx$，则称$F(x)$为$f(x)$的一个原函数.

$f(x)$的全部原函数称为$f(x)$在区间I上的不定积分，记为$\int f(x)dx=F(x)+C$

注:（1）若$f(x)$连续，则必可积;（2）若$F(x),G(x)$均为$f(x)$的原函数，则$F(x)=G(x)+C$．故不定积分的表达式不唯一.

2．不定积分性质：

性质 1：$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ 或 $d\left[\int f(x)dx\right]=f(x)dx$；

性质 2：$\int F'(x)dx=F(x)+C$ 或 $\int dF(x)=F(x)+C$；

性质 3：$\int[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx\pm\beta\int g(x)dx$，$\alpha,\beta$ 为非零常数.

3．不定积分计算方法：

（1）第一换元积分法（凑微分法）

设 $f(u)$ 的原函数为 $F(u)$，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式：

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=F(\varphi(x))+C$$

（2）第二类换元积分法

设 $x=\varphi(t)$ 单调、可导且导数不为零，$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 有原函数 $F(t)$，则

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C=F(\varphi^{-1}(x))+C$$

（3）分部积分法

$$\int u(x)v'(x)dx=\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$$

使用原则：

（1）由 v' 易求出 v；

（2）$\int v\mathrm{d}u$（$\int u'v\mathrm{d}x$）比 $\int u\mathrm{d}v$（$\int uv'\mathrm{d}x$）好求

一般经验：按“反，对，幂，指，三”的顺序，排前者取为 u，排后者取为 v'

（4）有理函数积分

若有理函数为假分式，则先将其变为多项式和真分式的和；对真分式的处理按情况确定.

4．定积分定义

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，用分点将区间 $[a,b]$ 等分成 n 个小区间，在每个小区间上任取一点 ξ_i（$i=1,2,\ldots,n$），作和式 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$. 当 $n\to\infty$ 时，上述和式无限接近于某个常数，这个常数叫作函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_i)$，其中 $f(x)$ 称为被积函数，x 称为积分变量，$f(x)\,dx$ 称为被积式，$[a,b]$ 为积分区间，a 为积分下限，b 为积分上限，“$\int$”称为积分号.

5．定积分的性质

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_a^b dx=b-a$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

在区间$[a,b]$恒有 $f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)dx \geq 0$

$f(x) \leq g(x), \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

$m \leq f(x) \leq M, x \in [a,b]$，则$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

定积分中值定理：$f(x)$在$[a,b]$连续，至少存在一个$\xi \in [a,b]$，使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$；$f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

6．微积分基本定理

一般地，如果 f（x）是区间[a，b]上的连续函数，并且$F'(x) = f(x)$，那么$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$．这个结论叫作微积分基本定理，又叫作牛顿——莱布尼茨公式．可以把$F(b) - F(a)$记为$F(x)|_a^b$，即$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$．

二、考题预测

（一）极限与连续

1．计算：$\lim\limits_{n\to+\infty}[n^2(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})]$=________．

2．数列$\{a_n\}$中，若$a_1 = 1$，$a_n + a_{n+1} = \frac{1}{2^n}$（$n \in N^*$），则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}) =$________．

3．已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a[1+4+7+\cdots+(3n-2)]}{7n^2-5n-2} = 6$，则 a=________．

4．设函数$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+mx}{x} & (x<0) \\ \log_2(x+2) & (x \geq 0) \end{cases}$是 R 上的连续函数，则实数 m 的值为（　　）．

A．－1　　B．0　　C．1　　D．2

5．f(x)在 x_0 处连续，是 $f(x_0)$有定义的（　　）条件．

A．充分不必要　　B．充要

C．必要不充分　　D．既不充分也不必要

6．要使函数 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ 在点 x=-1 处连续，则对 f(x)可以补充的一个条件是（　　）.

A．当 x=-1 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$　　B．当 x=-1 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}$

C．当 x=1 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}$　　D．当 x=1 时，$f(x)=\dfrac{1}{2}$

7．下列函数有界的是（　　）.

A．$y=x$　　B．$y=e^x$　　C．$y=\frac{1}{x}(-\infty,-1)$　　D．$y=\ln x$

8．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(an-1)(bn+2)}{2n+3}=-4$，求 a,b .

9．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{-n}=$__________.

10．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x+3}{x+1})^x=$________.

（二）导数与微分

1．曲线 $y=e^{-5x}+2$ 在点(0，3)处的切线方程为__________.

2．已知函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ 且 $f(x)=x^2f'(\frac{\pi}{3})+\sin x$，则 $f'(\frac{\pi}{3})=$________.

3．若曲线 $f(x)=x\sin x+1$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线与直线 $ax+2y+1=0$ 互相垂直，则实数 $a=$_________.

4．设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y+x+\sin y=0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{1+\cos y}$　　B．$\dfrac{1}{1+\sin y}$　　C．$\dfrac{-1}{1+\cos y}$　　D．$\dfrac{-1}{1+\sin y}$

5．函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，$f(0)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f'(x)>1$，则不等式 $e^x\cdot f(x)>e^x+1$ 的解集为_________.

6．函数 $f(x)=x^3+3ax^2+3[(a+2)x+1]$ 有极大值又有极小值，则 a 的取值范围是________.

7．已知函数 $f\left(x\right)=x-a\ln x(a\in R)$．

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（2）设函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{1+a}{x}$，求函数 $h\left(x\right)$ 的单调区间．

8．设 $a,b\in R$，函数 $f(x)=e^x-a\ln x-a$，其中 e 是自然对数的底数，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x-y+b=0$．

（1）求实数 a,b 的值；

（2）求证:函数 $y=f(x)$ 存在极小值；

（3）若 $\exists x\in[\dfrac{1}{2},+\infty)$，使得不等式 $\dfrac{e^x}{x}-\ln x-\dfrac{m}{x}\le 0$ 成立，求实数 m 的取值范围．

（三）积分

1． $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x} dx=$（　　）.

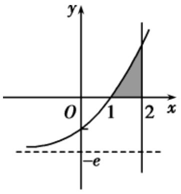
A． $2(\sqrt{2}-1)$　　B． $\sqrt{2}+1$　　C． $\sqrt{2}-1$　　D． $2-\sqrt{2}$

2．已知函数 y＝x2 与 y＝kx(k＞0)的图象所围成的阴影部分的面积为$\frac{9}{2}$，则 k 等于（　　）.

A．2　　B．1　　C．3　　D．4

3．曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x$ 所围成的封闭图形的面积为________.

4．如图，由函数 $f(x)=e^x-e$ 的图象，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的阴影部分面积等于（　　）.



A． e^2-2e-1　　B． e^2-2e　　C． $\frac{e^2-e}{2}$　　D． e^2-2e+1

5． $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx=$（　　）.

A． π　　B．2　　C． $\pi-2$　　D．0

6． $\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx=$________.

考点二 线性代数

一、考点回顾

（一）行列式的概念和基本性质

1．基本概念

定义 1 排列：由$1,2,\cdots,n$排成的一个有序数组，称为一个n阶排列．例如：2，3，1 即为一个三阶排列．

定义 2 逆序与逆序数：在一个n阶排列中，如果一个大数排在小数之前，则称这两个数构成一个逆序．一个排列中的逆序总数称为这个排列的逆序数．排列$j_1\ j_2\cdots j_n$的逆序数记为$\sigma(j_1\ j_2\cdots j_n)$．逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列．例如：排列 2，3，1 中 3，1 即为一个逆序，此外还有 2，1．因此，该排列的逆序数为 2，是一个偶排列．

定义 3 行列式：n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为所有取自于不同行不同列的n个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad （1．1）$$

的代数和，每个项前面带有正负号，（1．1）所带正负号由$(-1)^{\sigma(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}$确定，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}(-1)^{\sigma(j_1\ j_2\ \cdots\ j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}，（1．2）$$

其中$\sum\limits_{j_1\ j_2\ \cdots\ j_n}$表示对所有$n$阶排列求和．

(1．2)称为n阶行列式的完全展开式，（1．1）称为完全展开式的一般项．

定义 4 余子式与代数余子式：把行列式$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$中元素$a_{ij}$所在的$i$行元素和$j$列元素去掉，剩下的$n-1$行和$n-1$列元素按照元素原来的排列次序构成的$n-1$阶行列式，称为元素$a_{ij}$的余子式，记为$M_{ij}$，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素$a_{ij}$的代数余子式．

定义 5 设有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为D的转置行列式，记为D^T或者D'.

2．行列式的基本性质

性质 1 行列式的值等于其转置行列式的值，即$D=D^T$.

性质 2 将行列式中任意两行（列）位置互换，行列式的值反号.

性质 3 若行列式中两行（列）对应元素相同，行列式值为零.

性质 4 若行列式中某一行（列）有公因子k，则公因子k可提取到行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式中若一行（列）均为零元素，则此行列式值为零

性质 6 行列式中若两行（列）元素对应成比例，则行列式值为零

（二）矩阵

1．矩阵的定义

由数域F中 mn 个数a_{ij}（$i=1,2,\mathrm{L},m;\ j=1,2,\mathrm{L},n$）排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数域F上的一个 m×n 矩阵，可以写作$A=(a_{ij})_{m\times n}$. 在不需要表示出矩阵的元素时，也可以写作$A_{m\times n}$.

2．矩阵的线性运算

（1）加法：设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$与$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$是两个同型矩阵，称$s\times n$矩阵$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{s\times n}$为矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$的和，记为$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

（2）运算规律：设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{0}$都是$s\times n$矩阵，则矩阵的加法满足下面的运算规律：

① $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

② $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$．

（3）数乘：

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$ 是数域 F 上的矩阵，k 是数域 F 上的一个数，称 $s\times n$ 矩阵 $(ka_{ij})_{s\times n}$ 为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量乘积，简称数乘，记为 $k\boldsymbol{A}$．

（4）乘法

定义：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ik})_{s\times m},\boldsymbol{B}=(b_{kj})_{m\times n}$ 都是数域 F 上的矩阵．记 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{s\times n}$，（其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum\limits_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$），称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$．

运算规律：若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足可乘条件，则

结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

分配律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$；

$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{E})$．

（5）矩阵的逆矩阵

定义：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵或非奇异矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记做 $A^{-1}=B$．

性质：

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$．当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

②若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{T}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^{T})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{T}$；

③若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

④若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，k 为任意非零的数，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$．

（二）齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0\end{cases}\qquad\text{(a)}$$

1．解的性质

（1）方程组（a）的两个解的和还是方程组（a）的解；

（2）方程组（a）的一个解的倍数还是方程组（a）的解．

2．基础解系

（1）齐次线性方程组（a）的一组解$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$称为（a）的一个基础解系，如果

1）方程组（a）的任何一个解都能表成$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$的线性组合；

2）$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$线性无关．

（2）在齐次线性方程组（a）有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于$n-r$，这里r表示系数矩阵的秩．

（三）非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=b_s \end{cases} \qquad \text{（b）}$$

1．线性方程组有解的判别定理

线性方程组（b）有解的充分必要条件为它的系数矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$与增广矩阵

$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$有相同的秩．

2．方程组 Ax=b（A 为 m×n 矩阵）解的情况：

$r(A)=r(\overline{A})=n \Leftrightarrow$ 有唯一解

$r(A)=r(\overline{A})<n \Leftrightarrow$ 有无穷多解

$r(A)+1=r(\overline{A}) \Leftrightarrow$ 无解，即 b 不能由 A 的列向量线性表出．

3．解的性质

（1）线性方程组（b）的两个解的差是它的导出组（a）的解．

（2）线性方程组（b）的一个解与它的导出组（a）的一个解之和还是线性方程组（b）的解．

（3）如果γ_0是线性方程组（b）的一个特解，那么方程组（b）的任一个解γ都可表示成$\gamma=\gamma_0+\eta$，其中η是导出组（a）的一个解．

二、考题预测

1．设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$=m，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$=n，则行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$等于（　　）.

A．m+n　　B．-(m+n)　　C．n-m　　D．m-n

2．设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 A-1 等于（　　）.

A．$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　B．$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$　　C．$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$　　D．$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3．设 A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 5 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$，R(A)等于（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．a=1 是齐次方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$有非零解的（　　）.

A．充分必要条件　　B．充分而非必要条件

C．必要而非充分条件　　D．既非充分又非必要条件

5．设$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则$(A-2E)^{-1}=$__________.

6．矩阵$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$的秩为_________.

7．试计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

8．计算行列式$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$的值．

9．已知矩阵 A$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}为（　　）．

A．$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C．$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10．设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，则$(AB)^{-1}=$（　　）．

A．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$　　B．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

C．$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix}$　　D．$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

11．求 λ 为________时，方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ 3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解.

考点三 空间解析几何

（一）平面

1. 平面的方程

（1）点法式

已知点 $M(x_0,y_0,z_0)$，法线向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，平面的点法式方程为

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。

（2）一般式

$Ax+By+Cz+D=0$（A,B,C 不全为 0）其中法向量为 $\vec{n}=\{A,B,C\}$

一般方程的几种特殊情况

① $D=0$,平面通过坐标原点.

② $A=0,\begin{cases} D=0, & \text{平面通过}x\text{轴}, \\ D\neq 0, & \text{平面平行于}x\text{轴} \end{cases}$

③ $A=B=0$,平面平行于 xoy 坐标面.

④ $A=C=0$,平面平行于 xoz 坐标面.

⑤ $B=C=0$,平面平行于 yoz 坐标面.

(3) 截距式

一般方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，令 $A=-\dfrac{D}{a},B=-\dfrac{D}{b},C=-\dfrac{D}{c}$，代入一般方程可得 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，为平面方程的截距式.

2. 确定平面方程的两个基本思路

（1）已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 和平面 Π 的法向量 $\vec{n}=\{A,B,C\}$，则平面被确定，方程利用一般式即可求得.

（2）已知平面 Π 上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 和两个与平面 Π 平行且不共线的向量 $\vec{m}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{n}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则平面完全被确定方程为 $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$。

3. 两个平面间的关系

$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则

$$\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Π_1 的 Π_2 夹角 θ（法向量间的夹角，不大于 90 度）

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

等级：★

例 1．研究以下各组里两平面关系的位置关系

（1）$-x+2y-z+1=0,\quad y+3z-1=0$

（2）$2x-y+z-1=0, -4x+2y-2z-1=0$

等级：★

例 2．已知两平面

α：$mx+7y-6z-24=0$与平面β:$2x-3my+11z-19=0$ 互相垂直，求 m 的值。

（二）直线

1. 直线的方程

（1）一般式（交面式）

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$ 其中$\{A_1,B_1,C_1\}$与$\{A_2,B_2,C_2\}$不平行.

（2）对称式（标准式）

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$，其中$\{l,m,n\}$为直线的方向向量.

（3）参数式

$$\begin{cases}x=x_0+tl,\\y=y_0+tm,\\z=z_0+tn.\end{cases}$$

2. 确定直线方程的两个基本思路

（1）两个不平行的直线相交于一条直线可用一般式确定直线方程.

（2）已知直线 L 上一点 M 以及直线 L 的方向向量$\{l,m,n\}$可利用对称式和参数式确定直线 L 的方程.

等级：★★

例 3．用标准式及参数式表示直线$\begin{cases}x+y+z+1=0\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$

3. 两条直线间的关系

设 $L_1:\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$，$L_2:\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$，则

$L_1 /\!/ L_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$， 且 (x_1,y_1,z_1) 不满足 L_2 的方程.

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

L_1 的 L_2 夹角 θ（方向向量间的夹角，不大于 90 度）

$$\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

等级：★★

例 4．求直 L_1 线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角。

例 5．求以下两直线的夹角

$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ $\qquad L_2:\begin{cases}x+y+2=0\\ x+2z=0\end{cases}$

4. 直线与平面的位置关系

直线和它在平面投影直线所夹锐角 θ 称为直线与平面的夹角.当直线与平面垂直时，规定夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

$L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$， $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$， $\vec{s}=\{l,m,n\},\vec{n}=\{A,B,C\}$， 则

（1）L// $\Pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$， 即 $Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

（2）L⊥ $\Pi \Leftrightarrow \vec{s} /\!/ \vec{n}$， 即 $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{n}$

（3）L 与 Π 的夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\langle\vec{s},\vec{n}\rangle$， $\sin\theta=\dfrac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$

则 $\langle\vec{s},\vec{n}\rangle=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ 或 $\langle\vec{s},\vec{n}\rangle=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$， 所以直线与平面的夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

等级：★★

例 6．直线 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 与平面 Π：$x+y+z=3$ 的位置关系是。

例 7．求过点（1，−2，4）且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程

（三）曲面方程

1. 球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

2 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面.这条直线叫做旋转曲面的轴.

yoz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周的曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；

yoz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周的曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

3.柱面

平行于定直线,并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面.这条定曲线 C 叫做柱面的准线,动直线 L 叫做柱面的母线.

4. 二次曲面

（1）椭球面

方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

①椭球面与三个坐标平面的交线：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$.

②椭球面的几种特殊情况

$a=b$，$\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{a}+\dfrac{z^2}{c}=1$，旋转椭球面，由椭圆 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{z^2}{c}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

③ $a=b=c$，为球面. 方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

（2）抛物面

① $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$，$q$>0）为椭圆抛物面.

② $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2p}=z$ 为旋转抛物面（由 xoz 平面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成）.

③$-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ 为双曲抛物面.

（3）双曲面

①单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

②双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

（四）曲面的切平面与法线方程

1. 设曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$，在曲面上任取一条通过点 M 的曲线：$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，曲线在 M 处的切向量为 $\vec{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

切平面方程为 $F_x(M)(x-x_0)+F_y(M)(y-y_0)+F_z(M)(z-z_0)=0$，

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

等级：★★★

例 8. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点（1，2，3）处的切平面及法线方程。

2. 空间曲面方程形为 $z=f(x,y)$，令 F(x,y,z)=f(x,y)-z，曲面在 M 处的切平面的法向量为：$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$.

曲线在 M 处的切平面的方程为 $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0$.

曲线在 M 处的法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

等级：★★★

例 9. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点（2，1，4）处的切平面及法线方程。